Obliczenia w LaTeX-u przy pomocy CalcTeX-a

CalcTeX (at) onet (dot) eu

9 września 2009

Spis treści

1 Wstęp

Ten folder zawiera kilka przykładów obliczeniowych przy użyciu pakietu CalcTeX. Obliczenia są wykonywane na wszytkich plikach o nazwie pasującej do maski `*-calc.tex` przy wykorzystaniu wszystkich funkcji w `python`ie zdefinowanych w katalogu `bin/py`. Folder ten zawiera wszystkie źródła pakietu CalcTeX oraz źródła przykładów, należy jedynie mieć zainstaowane `pdflatex` oraz `python`. Wyniki obliczeń są łączone w jeden plik wynikowy `main.pdf`. Pakiet ten dedykowany do obliczeń projektowych oraz ich składu, może być szczególnie przydatny dla inżynmierów czy techników w ich pracy projektowej. Pakiet ten również nadaje się do składu zbiorów zadań z przykładami obliczeniowymi.

Główną zaletą CalcTeX-a jest zintegrowanie kodu obliczeniowego ze świetnie złożonym tekstem.

Aby wykonać obliczeń na wszystkich plikach `*-calc.tex` należy uruchomić skrypt `go` np. `sh go`.

Więcej informacji dostępnych jest na stronie pakietu http://sg.bzip.pl/CalcTeX w razie jakichkolwiek uwag, sugestii czy problemów prosze o e-mail: CalcTeX (at) onet (dot) eu. Jestem otwarty na wszelkie uwagi. Jeżeli potrzebujesz pomocy to jak znajde chwilę, to z przyjemnością pomogę.

W celu szybkiego zapoznania się z podstawami działania pakietu sugeruję przejrzenie plików `00-pl-iso-calc.tex` oraz `010-ke-pl-iso-calc.tex`.

Te przykłady dostępne są na: http://sg.bzip.pl/CalcTeX/examples/wszystkie-w-jeden.tgz.

1.1 Pitagoras

W trójkącie prostokątnym prostokątne mają długości $a := 3$ i $b := 4$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

Obliczenia

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$c := \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

podstawiając do (1), długość przeciwprostokątnej wynosi $c = 5.0$.

1.2 Energia kinetyczna

Samochód o masie $m_s := 725 \cdot \mathrm{kg}$ porusza się w wyniku czego jego energia kinetyczna wynosi $E_k := 145 \cdot \mathrm{kJ}$. Jaka jest prędkość samochodu?

Obliczenia

Dane: masa, $m_s \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 725.0$
energia kinetyczna, $E_k \cdot \mathrm{MJ}^{-1} = 0.145$
Szukane: prędkość, $v =?$ m/s

$$E_k := \frac{m_s \cdot v^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v := \sqrt{\frac{2 \cdot E_k}{m_s}}; \quad v \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{-1} = 20.0 \tag{2}$$

prędkość samochodu wynosi $v \cdot (\mathrm{m/s})^{-1} = 20.0$, co jest równoważne $v \cdot (\mathrm{km/hr})^{-1} = 72.0$.
Poniższe obliczenia przeprowadzono przy użyciu pakietu CalcTEX.
http://sg.bzip.pl/CalcTeX/

1.3 Ziemia jako czarna dziura a przyciąganie księżyca

Jeżeli udałoby się ścisnąć kulę ziemską do kuli o dowolym promieniu, to przy jakim promieniu stałaby się czarną dziurą oraz ile, zgodnie z terorią newtonowską, wynosiłaby siła przyciągania ziemskiego dla masy $m_p := 20 \cdot \mathrm{kg}$ na powierzchni tak powstałej czarnej dziury? Ciekawe ile ta siła wynosi w odniesieniu do siły przyciągania Ksieżyca przez Ziemię.

Obliczenia

Wiemy, że czarna dziura to obiekt dla którego prędkość ucieczki jest conajmniej równa prędkości swiatła.

Dane:
$c := 299792458.0 \cdot \mathrm{m/s}$ – prędkość światła
$G := 6.673231 \cdot 10^{-11} \cdot \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$ – stała grawitacji
$M := 5.9736 \cdot 10^{24} \cdot \mathrm{kg}$ – masa Ziemi
$r := 6373.14 \cdot \mathrm{km}$ – promień Ziemi

Sprawdzenie stałych fizycznych poprzez obliczenie przyspieszenia ziemskiego

$$g_z := G \cdot \frac{M}{r^2}; \quad g_z \cdot (\mathrm{m}/\sec^2)^{-1} = 9.81443672259 \tag{3}$$

Jak widać z równania (3) wartość pszyspieszenia ziemskiego jest akceptowalna więc można przypuszczać, że stałe są poprawne.
Prędkość ucieczki dla ciała o masie M i promieniu r obliczamy z poniższej zależności (4):

$$v := \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} \tag{4}$$

Czyli dla Ziemi prędkość ucieczki wynosi: $v \cdot (\mathrm{km/s})^{-1} = 11.1847019857$.
Ziemia stanie się czarna dziurą, gdy prędkość ucieczki będzie conajmniej równa prędkości światła, czyli:

$$c := \sqrt{2 \cdot G \cdot M/r} \Leftrightarrow \tag{5}$$

$$r_c := (2 \cdot G \cdot M)/c^2 \tag{6}$$

podstawiając, promień ściśniętej Ziemi – czarnej dziury, wówczas wyniesie: $r_c \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 8.87076116938$.
Pszyspieszenie ziemskie na powierzchni tak powstałej czarnej dziury wynosi:

$$g_c := G \cdot \frac{M}{r_c^2}; \quad g_c \cdot (\mathrm{m}/\sec^2)^{-1} = 5.06582897215e + 18$$

Newtonowska siła przyciągania dla masy $m_p \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 20.0$ na powierzchni czarnej dziury wyniesie:

$$F_c := m_p \cdot g_c; \quad F_c \cdot (\mathrm{EN})^{-1} = 101.316579443$$

Obliczenie siły przyciągania Księżyca przez Ziemię
$m_k := 7.3477 \cdot 10^{22} \cdot \mathrm{kg}$ masa Książyca
$R_{zk} := 384.403 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{km}$ średnia odległość Ziemi od Księżyca.
Więc siła przyciągania Ziemi do Księżyca wynosi

$$F_{zk} := G \cdot \frac{M \cdot m_k}{R_{zk}^2}; \quad F_{zk} \cdot \mathrm{EN}^{-1} = 198.221234395$$

Oznacza to, że masa $m_p \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 20.0$ na powierzchni tak powstałej czarnej dziury będzie przyciągana z siłą stanowiącą $F_c/F_{zk} \cdot \%^{-1} = 51.1128788761$ siły przyciągania Księżyca przez Ziemię.
Odp.: Ziemia stanie się czarną dziurą jeśli ściśniemy ją do kuli o promieniu conajmniej $r_c \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 8.87076116938$ a na jej powierzchni na ciało o masie $m_p \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 20.0$ zgodnie z teorią newtonowską, zadziała siła $F_c \cdot \mathrm{EN}^{-1} = 101.316579443$, króra stanowi

około $k_{zk} \cdot \%^{-1} = 51.1$ siły oddziaływania pomiędzy Ziemią a Księżycem (o ile się nie pomyliłem, przypominam, że $eksa := 10^{18} = 1e + 18$ oznaczane jako E). Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTEX 9 września 2009
http://sg.bzip.pl/CalcTeX.
Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.4 Rozciąganie pręta

Jak długi powinien być stalowy pręt, by zawieszony swobodnie uległ zerwaniu pod wpływem własnego ciężaru? Wiedząc, że pręt stalowy o przekroju kwadratu o boku $a := 1 \cdot \mathrm{cm}$ można maksymalnie obciążyć masą $m_{max} := 5.0 \cdot \mathrm{ton}$.

Obliczenia

Dla stali mamy:
$F_r := m_{max} \cdot g_n$ – maksymalna siła rozrywająca pręt stalowy
$R_r := F_r/(a^2)$ – maksymalne naprężenie rozciągające dla stali $R_r \cdot \mathrm{MPa}^{-1} = 490.3325$
$\rho := 7850.0 \cdot \mathrm{kg/m^3}$ – gęstość stali ($\rho \cdot (\mathrm{gm/cm^3})^{-1} = 7.85$).
Zakładając, że przyspieszenie ziemskie jest stałe dla całej długości pręta oraz jest równe średniemu normalnemu przyspieszeniu ziemskiemu, które wynosi: $g_n \cdot (\mathrm{m/s^2})^{-1} = 9.80665$ oraz wiedząc, że:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{S} = \frac{S \cdot l \cdot \rho \cdot g}{S} = l \cdot \rho \cdot g \tag{7}$$

gdzie:
F – siła,
σ – naprężenie,
V – objętość,
S – pole przekroju poprzecznego pręta.
Dla $\sigma := R_r$ i przekształcajac (7) mamy:

$$l := \frac{\sigma}{\rho \cdot g_n} \quad \Rightarrow l \cdot \mathrm{km}^{-1} = 6.36942675159 \tag{8}$$

Odp.:
Zwisający swobodnie pręt zerwie się jeżeli jego długość przekroczy $l \cdot \mathrm{km}^{-1} = 6.36942675159$ lub wyrażając długość w milach $l \cdot \mathrm{mile}^{-1} = 3.95777829451$.

1.5 Ściskanie pręta z wyboczeniem

Pręt stalowy o długości $l_p := 0.55 \cdot \mathrm{m}$, utwierdzony w jednym końcu, ściskany jest osiową siłą P działającą na drugi, swobodny koniec. Przekrojem poprzecznym pręta jest prostokąt o bokach $a := 4.5 \cdot \mathrm{cm}$, $b := 25 \cdot \mathrm{mm}$ oblicz dopuszczalną wartość siły P, by współczynnik bezpieczeństwa wynosił $n := 2.5$ oraz jaką masą można zastąpić siłę P? Moduł Younga $E := 1.9 \cdot 10^{11} \cdot \mathrm{Pa}$.

Rozwiązanie

Pręt utwierdzony w jednym końcu, drugi koniec swobodny więc

$l_w := 2.0 \cdot l_p,$ $\qquad l_w \cdot (\mathrm{cm})^{-1} = 110.0.$
Wyboczenie pręta nastąpi w ten sposób, że warstwa obojętna zginanego pręta będzie równoległa do dłuższego boku przekroju poprzecznego zatem

$$J := \frac{a \cdot b^3}{12}; \quad J \cdot (\mathrm{cm})^{-4} = 5.859375.$$

Promień bezwładności dla pola przekroju poprzecznego pęta $F := a{\cdot}b$ obliczmy z poniższej zależności

$$i_p := \sqrt{\frac{J}{F}}; \quad i_p \cdot (\mathrm{cm})^{-1} = 0.721687836487.$$

Smukłość pręta

$$s_p := \frac{l_w}{i_p}; \quad s_p = 152.420471066.$$

Ponieważ $s_p = 152.0 > 100 = s_g$, należy zastosować wzór Eulera

$$P_{kr} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_w^2}; \quad P_{kr} \cdot (\mathrm{kN})^{-1} = 90.806987807. \tag{9}$$

By zachować pewność $n = 2.5$, można przyłożyć siłę

$$P := \frac{P_{kr}}{n}; \quad P \cdot (\mathrm{kN})^{-1} = 36.3227951228.$$

W przeliczeniu na masę mamy

$$P := m_z \cdot g_n \quad \Leftrightarrow \quad m_z := \frac{P}{g_n}; \quad m_z \cdot (\mathrm{kg})^{-1} = 3703.89430874.$$

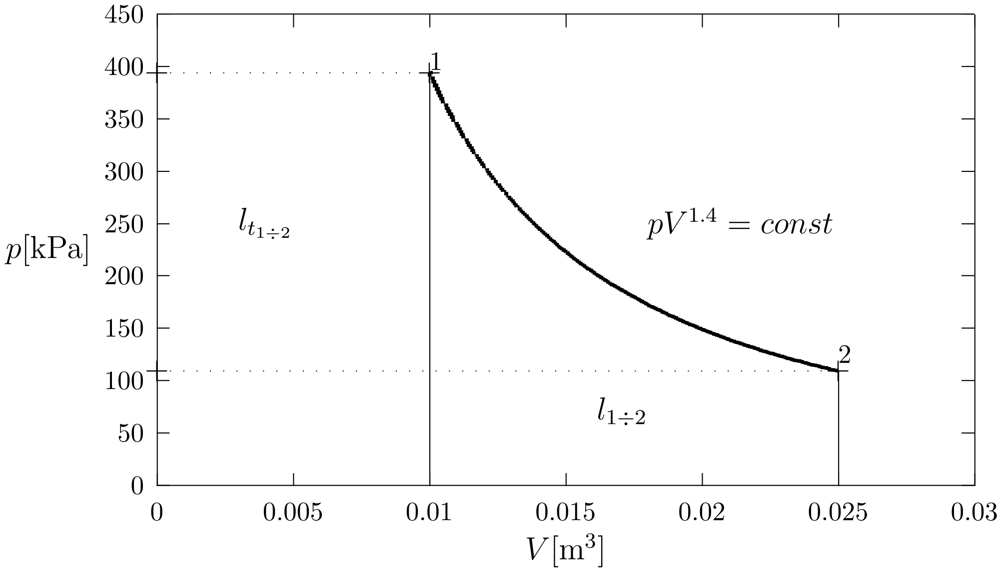
Odp.: Pręt stalowy o module Younga $E \cdot (\mathrm{MN/mm^2})^{-1} = 0.19$ zamocowany z jednego końca i swobodny z drugiego końca o wymiarach przekroju poprzecznego $a \cdot (\mathrm{cm})^{-1} = 4.5 \times b \cdot (\mathrm{cm})^{-1} = 2.5$ oraz długości $l_p \cdot (\mathrm{cm})^{-1} = 55.0$ przy współczynniku bezpieczeństwa $n = 2.5$ można obciążyć siłą osiową nie większą niż $P \cdot (\mathrm{kN})^{-1} = 36.2$, co w przybliżeniu odpowiada masie $m_z \cdot \mathrm{ton}^{-1} = 3.7$.

1.5.1 Praca Techniczna

Idealny tłokowy silnik pneumatyczny napełniony jest masą $m_p := 12.5 \cdot \mathrm{gm}$ powietrza o objętości $V_1 := 10 \cdot \mathrm{dm}^3$ przy ciśnieniu manometrycznym $p_m := 294 \cdot \mathrm{kPa}$. Podczas ekspansji do objętości $V_2 := 25 \cdot \mathrm{l}$ ciśnienie zmienia się według zależności:

$$p = p_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\kappa} \quad \kappa := \frac{7.}{5}.$$

Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_{atm} := 997 \cdot \mathrm{hPa}$. Jaka jest jednostkowa praca techniczna oddana przez powietrze podczas jednego cyklu roboczego? Jaka jest moc tego silnika, gdy wykonuje on $f := 5$ cykle robocze w ciągu sekundy?



Rysunek 1: Rozprężanie od $V_1 = 0.01$ m^3 do $V_2 = 0.025$ m^3 w/g krzywej $pV^\kappa = const$ dla $\kappa = 1.4$.

1.5.2 Praca techniczna – rozwiązanie

Dane:
$m_p \cdot (\mathrm{kg})^{-1} = 0.0125$
$V_1 \cdot (\mathrm{m}^{-3}) = 0.01$
$V_2 \cdot (\mathrm{m}^{-3}) = 0.025$
$p_m \cdot (\mathrm{kPa})^{-1} = 294.0$
$\kappa = 1.4$
$p_{atm} \cdot (\mathrm{kPa})^{-1} = 99.7$
$f \cdot \mathrm{Hz}^{-1} = 5.0$

Szukane:
$l_{t_{1\div2}} =?$
$N_{1\div2} =?$

Obliczamy ciśnienie absolutne panujące w warunkach początkowych

$$p_1 := p_m + p_{atm}, \quad p_1 \cdot (\mathrm{kPa})^{-1} = 393.7$$

$$p_{abs} := p_1 \quad p_{abs} \cdot (\mathrm{kPa})^{-1} = 393.7$$

Objętość właściwa

$$v_1 := \frac{V_1}{m_p}; \quad v_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right)^{-1} = 0.8$$

$$v_2 := \frac{V_2}{m_p}; \quad v_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right)^{-1} = 2.0$$

Ciśnienie w punkcie końcowym

$$p_2 := p_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\kappa; \quad p_2 \cdot (\mathrm{kPa})^{-1} = 109.1564499$$

Jednoskowa praca techniczna

$$l_{t_{1\div2}} = -\int_{p1}^{p2} v(p)dp \tag{10}$$

wiemy, że

$$p = p_1 \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\kappa}$$

$$pv^{\kappa} = p_1 \left(v_1\right)^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad v^{\kappa} = \left(v_1\right)^{\kappa} \frac{p_1}{p}$$

$$v(p) = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \tag{11}$$

Czyli po podstawieniu zależności (11) do równania (10) otrzymamy:

$$l_{t_{1\div 2}} = -\int_{p_1}^{p_2} v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp = -v_1 p_1^{\frac{1}{\kappa}} \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{\kappa}} dp = -v_1 p_1^{\frac{1}{\kappa}} \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1}\right) p^{-\frac{1}{\kappa}+1}\bigg|_{p_1}^{p_2}$$

$$l_{t_{1\div 2}} := -v_1 \cdot p_1^{(1/\kappa)} \cdot \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1}\right) \cdot \left(p_2^{((\kappa-1)/\kappa)} - p_1^{((\kappa-1)/\kappa)}\right); \quad l_{t_{1\div 2}} \cdot \left(\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}\right)^{-1} = 338.264850699 \tag{12}$$

Obliczenie mocy $N_{1\div 2}$

$$N_{1\div 2} = \frac{L_{t_{1\div 2}}}{\tau} = \frac{l_{t_{1-2}} \cdot m_p}{\tau}; \quad N_{1\div 2} := l_{t_{1\div 2}} \cdot m_p \cdot f; \quad N_{1\div 2} \cdot (\mathrm{kW})^{-1} = 21.1415531687 \tag{13}$$

Odpowiedź: Jednostkowa praca techniczna oddana przez powietrze podczas jednego cyklu roboczego wynosi: $l_{t_{1\div 2}} \cdot (\mathrm{kJ/kg})^{-1} = 338.265$, natomiast moc tego silnika, gdy wykonuje on $f = 5$ cykle robocze w ciągu sekundy wynosi: $N_{1\div 2} \cdot (\mathrm{kW})^{-1} = 21.142$.

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTEX 9 września 2009

http://sg.bzip.pl/CalcTeX.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.6 Gaz płynny

Mieszanina gazów składa się z $r_{C_3H_8} := 80 \cdot \%$ propanu i w reszcie z butanu. Oblicz ilość powietrza do spalania, przy jego nadmiarze $Z := 5 \cdot \%$ oraz ilość i skład spalin wilgotnych i suchych.

Obliczenia

$\lambda_p := 1 + Z$ – współczynnik nadmiaru powietrza $\lambda_p = 1.05$
$r_{C_4H_{10}} := 100.0 \cdot \% - r_{C_3H_8}$ – udział butanu w gazie płynnym $r_{C_4H_{10}} = 0.2$
Skład powietrza:
$r_{air_{O_2}} := 21 \cdot \%$ – udział tlenu $r_{air_{O_2}} = 0.21$
$r_{air_{N_2}} := 100 \cdot \% - r_{air_{O_2}}$ – udział azotu $r_{air_{N_2}} = 0.79$
Spalanie obu składników gazu płynnego odbywa się według równań:

$$\mathrm{C_3H_8} + 5 \cdot \mathrm{O_2} \rightarrow 3 \cdot \mathrm{CO_2} + 4 \cdot \mathrm{H_2O} \tag{14}$$

$$n_{i1O_2} := 5.0 \quad n_{o1CO_2} := 3.0 \quad n_{o1H_2O} := 4.0$$

$$\mathrm{C_4H_{10}} + 6.5 \cdot \mathrm{O_2} \rightarrow 4 \cdot \mathrm{CO_2} + 5 \cdot \mathrm{H_2O} \tag{15}$$

$$n_{i2O_2} := 6.5 \quad n_{O_2CO_2} := 4.0 \quad n_{O_2H_2O} := 5.0$$

Ilość tlenu do spalania:

$$V_{O_2} := n_{i1O_2} \cdot r_{C_3H_8} + n_{i2O_2} \cdot r_{C_4H_{10}}; \quad V_{O_2} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 5.3$$

$\mathrm{um_{pal}}$ – umowny metr sześcieny paliwa
Ilość powietrza:

$$V_{air_{min}} := V_{O_2}/r_{air_{O_2}}; \quad V_{air_{min}} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 25.2380952381$$

Rzeczywista ilość powietrza:

$$V_{air} := \lambda_p \cdot V_{air_{min}}; \quad V_{air} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 26.5$$

Objetości składników spalin:

$$V_{CO_2} := 3 \cdot r_{C_3H_8} + 4 \cdot r_{C_4H_{10}}; \quad V_{CO_2} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 3.2$$

$$V_{H_2O} := 4 \cdot r_{C_3H_8} + 5 \cdot r_{C_4H_{10}}; \quad V_{H_2O} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 4.2$$

$$V_{N_2} := r_{air_{N_2}} \cdot V_{air}; \quad V_{N_2} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 20.935$$

$$V_{O_2} := r_{air_{O_2}} \cdot (\lambda_p - 1) \cdot V_{air_{min}}; \quad V_{O_2} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 0.265$$

Objętość spalin całkowitych

$$V_{sp} := V_{CO_2} + V_{H_2O} + V_{N_2} + V_{O_2}; \quad V_{sp} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 28.6$$

Objętość spalin susych

$$V_{sp_{such}} := V_{sp} - V_{H_2O}; \quad V_{sp_{such}} \cdot \left(\mathrm{um}^3/\mathrm{um_{pal}}^3\right)^{-1} = 24.4$$

Skład spalin wilgotnych

$$r^{wil}_{CO_2} := \frac{V_{CO_2}}{V_{sp}}; \quad r^{wil}_{CO_2} \cdot \%^{-1} = 11.1888111888$$

$$r^{wil}_{H_2O} := \frac{V_{H_2O}}{V_{sp}}; \quad r^{wil}_{H_2O} \cdot \%^{-1} = 14.6853146853$$

$$r^{wil}_{N_2} := \frac{V_{N_2}}{V_{sp}}; \quad r^{wil}_{N_2} \cdot \%^{-1} = 73.1993006993$$

$$r^{wil}_{O_2} := \frac{V_{O_2}}{V_{sp}}; \quad r^{wil}_{O_2} \cdot \%^{-1} = 0.926573426573$$

Razem $\left(r^{wil}_{CO_2} + r^{wil}_{H_2O} + r^{wil}_{N_2} + r^{wil}_{O_2}\right) \cdot \%^{-1} = 100.0$

Skład spalin suchych

$$r^{such}_{CO_2} := \frac{V_{CO_2}}{V_{sp_{such}}}; \quad r^{such}_{CO_2} \cdot \%^{-1} = 13.1147540984$$

$$r^{such}_{N_2} := \frac{V_{N_2}}{V_{sp_{such}}}; \quad r^{such}_{N_2} \cdot \%^{-1} = 85.7991803279$$

$$r^{such}_{O_2} := \frac{V_{O_2}}{V_{sp_{such}}}; \quad r^{such}_{O_2} \cdot \%^{-1} = 1.08606557377$$

Razem $\left(r^{such}_{CO_2} + r^{such}_{N_2} + r^{such}_{O_2}\right) \cdot \%^{-1} = 100.0$

1.7 Opór cieplny rury

Rurociąg stalowy o współczynniku przewodzenia ciepła $\lambda_1 := 40.0 \cdot \mathrm{W}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})$, średnicy wewnętrznej $d_1 := 98 \cdot \mathrm{mm}$ i grubości $\delta_s := 5 \cdot \mathrm{mm}$ zaizolowano warstwą wełny mineralnej o $\lambda_2 := 0.062 \cdot \mathrm{W}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})$ i grubości $\delta_1 := 40 \cdot \mathrm{mm}$ oraz warstwą styropianu o $\lambda_3 := 0.042 \cdot \mathrm{W}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})$ i tej samej grubości. Wewnętrz rurociagu płynie woda pod ciśnieniem, o temperaturze $T_w := 120 \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}$, a współczynnik przejmowania ciepła od strony wody wynosi $\alpha_w := 200 \cdot \mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K})$. Na zewnatrz powietrze ma temperaturę $T_z := 15 \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}$, a współczynnik przejmowania ciepła $\alpha_z := 8 \cdot \mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K})$.
Określić straty ciepła z $l := 1.0 \cdot \mathrm{m}$ rurociągu i obliczyć temperatury na granicach ścian i izolacji. Ile wynosi strata ciepła, jeżeli warstwy izolacji umieści się w odwrotnej kolejności?

Obliczenia

Uwaga przyjęto oznaczenia log jako uproszczenie zapisu $\log_e$
$d_2 := d_1 + 2 \cdot \delta_s$ $\quad d_2 \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 108.0$
$d_3 := d_2 + 2 \cdot \delta_1$ $\quad d_3 \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 188.0$
$\delta_2 := \delta_1$ $\quad \delta_2 \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 40.0$
$d_4 := d_3 + 2 \cdot \delta_2$ $\quad d_4 \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 268.0$
Całkowity opór termiczny dla $l = 1.0$ m rurociągu można określić z zależności

$$R_1 := \frac{1}{\pi \cdot d_1 \cdot \alpha_w \cdot l}; \quad R_2 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_1 \cdot l} \cdot \log\left(\frac{d_2}{d_1}\right); \quad R_3 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_2 \cdot l} \cdot \log\left(\frac{d_3}{d_2}\right)$$

$$R_4 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_3 \cdot l} \cdot \log\left(\frac{d_4}{d_3}\right); \quad R_5 := \frac{1}{\pi \cdot d_4 \cdot \alpha_z \cdot l}$$

$$R_t := R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5; \quad R_t \cdot (\mathrm{K}/\mathrm{W})^{-1} = 2.93153052276$$

Liniowa gęstość strumnienia ciepła, czyli ilość ciepła oddawanaego przez $l = 1.0$ m

$$\dot{Q} := \frac{T_w - T_z}{R_t}; \quad \dot{Q} \cdot \mathrm{W}^{-1} = 35.8174677647$$

Ponieważ

$$\dot{Q}_1 := \frac{T_w - T_1}{R_1} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 := T_w - R_1 \cdot \dot{Q}; \quad T_1 \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}^{-1} = 119.418313567$$

Analogicznie można obliczyć temperature rury od strony izolacji

$$T_2 := T_w - (R_1 + R_2) \cdot \dot{Q}; \quad T_2 \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}^{-1} = 119.404466453$$

Temperatura pomiędzy warstwami izolacji

$$T_3 := T_w - (R_1 + R_2 + R_3) \cdot \dot{Q}; \quad T_3 \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}^{-1} = 68.4389287179$$

Temperatura na powierzchni zewnetrznej izolacji (od strony powietrza)

$$T_4 := T_z + R_5 \cdot \dot{Q}; \quad T_4 \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}^{-1} = 20.3176558244$$

W przypadku zmiany kolejności warstw izolacji ulegaja zmianie poszczególne opory:

$$R'_3 := \frac{\log(d_3/d_2)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_3 \cdot l}; \quad R'_3 \cdot \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right)^{-1} = 2.10050699039$$

$$R'_4 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_2 \cdot l} \cdot \log\left(\frac{d_4}{d_3}\right); \quad R'_4 \cdot \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right)^{-1} = 0.910122453428$$

Całkowity opór wynosi wówczas

$$R'_t := R_1 + R_2 + R'_3 + R'_4 + R_5; \quad R'_t \cdot \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right)^{-1} = 3.1757217784$$

$$\dot{Q}' := \frac{T_w - T_z}{R'_t}; \quad \dot{Q}' \cdot (\mathrm{W})^{-1} = 33.0633497916$$

1.8 Wymienik typu rura w rurze dla wymiany ciepła pomiądzy powietrzem a wodą

Gorące powietrze podgrzewa wodę w wymieniku ciepła typu rura w rurze. Powietrze przepływa w przestrzeni pomiędzy rurami z prędkością $w_p := 3.5 \cdot \mathrm{m/s}$. Temperatura powietrza na wylocie wynosi $t_{p_1} := 220 \cdot {}^\circ\mathrm{C}$. Wydatek wody wynosi $\dot{m}_w := 90 \cdot \mathrm{kg/hr}$, temperatura wody na wylocie $t_{w_1} := 10 \cdot {}^\circ\mathrm{C}$ a na wylocie $t_{w_2} := 30 \cdot {}^\circ\mathrm{C}$. Średnice rur $d_{1_w} := 26 \cdot \mathrm{mm}$, $d_{2_w} := 32 \cdot \mathrm{mm}$, $d_{1_z} := 160 \cdot \mathrm{mm}$. Oszacuj temperaturę ściany od strony wody jeśli dodatkowo osadziłby się kamień kotłowy o gruboći $\delta_k := 0.3 \cdot \mathrm{mm}$ $\lambda_k := 0.15 \cdot \mathrm{W}/\left(\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\right)$. Współczynnik przewodzenia ciepła ścian $\lambda_s := 40 \cdot \mathrm{W}/\left(\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\right)$. Oblicz długość wymmienika dla wymienika współrądowego i przeciwprądowego dla rury bez kamienia kotłowego.

Obliczenia

Średnica wewnętrzna przepływuwody wynosi

$$d_w := d_{1_w} - 2 \cdot \delta_k; \quad d_w \cdot (\mathrm{mm})^{-1} = 25.4 \tag{16}$$

Temperatura średnia wody

$$t_{sr_w} := \frac{1.}{2} \cdot (t_{w_1} + t_{w_2}); \quad t_{sr_w} \cdot {}^\circ\mathrm{C}^{-1} = 20.0 \tag{17}$$

dla t_{sr_w} własności fizyczne wody są następujące $\rho_w := 998.2 \cdot \mathrm{kg/s}$, $c_w := 4.183 \cdot \mathrm{kJ}/\left(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}\right)$, $\lambda_w := 0.599 \cdot \mathrm{W}/\left(\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\right)$, $\nu_w := 1.006 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\right)$, $\mathrm{Pr}_w := 7.02$.
Zakładamy średnią temperaturę powietrza $t_{sr_p} := 200 \cdot {}^\circ\mathrm{C}$, właściwości powietrza wynoszą: $\rho_p := 0.746 \cdot \mathrm{kg/s}$, $c_p := 1.026 \cdot \mathrm{kJ}/\left(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}\right)$, $\lambda_p := 0.0393 \cdot \mathrm{W}/\left(\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\right)$, $\nu_p := 34.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\right)$, $\mathrm{Pr}_p := 0.68$.
Na podstawie bilansu energi wynzaczamy końcową temperaturę powietrza

$$w_p \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(d_{2_w}^2 - d_{1_z}\right) \cdot \rho_p \cdot (t_{p_1} - t_{p_2}) = \dot{m}_w \cdot c_w \cdot (t_{w_2} - t_{w_1}); \tag{18}$$

$$t_{p_2} := t_{p_1} - \frac{\dot{m}_w \cdot c_w \cdot (t_{w_2} - t_{w_1})}{w_p \cdot \pi/4 \cdot (d_{1_z}^2 - d_{2_w}^2) \cdot \rho_p \cdot c_p}; \quad t_{p_2} \cdot {}^\circ\mathrm{C}^{-1} = 179.551487351 \tag{19}$$

Czyli średnia temperatura powietrza wynosi w rzeczywistości

$$t_{sr_p} := \frac{1.}{2} \cdot (t_{p_1} + t_{p_2})\,; \quad t_{sr_p} \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}^{-1} = 199.775743675 \tag{20}$$

Zatem przyjęte do obliczeń własności fizyczne powietrza dla 200°C można uznać za właściwe.
Obliczenie Liczby Reynoldsa dla powietrza
Pole przekroju poprzecznego przepływy powietrza

$$A_p := \frac{\pi}{4} \cdot \left(d_{1_z}^2 - d_{2_w}^2\right); \quad A_p \cdot (\mathrm{m})^{-2} = 0.0193019452637 \tag{21}$$

Obwód zwilżony dla powietrza

$$O_z := 2 \cdot \pi \cdot \frac{1.}{2} \cdot (d_{1_z} + d_{2_w})\,; \quad O_z \cdot (\mathrm{m})^{-1} = 0.603185789489 \tag{22}$$

Średnica hydrauliczna

$$d_h := \frac{4 \cdot A_p}{O_z}; \quad d_h \cdot (\mathrm{mm})^{-1} = 128.0 \tag{23}$$

$$\mathrm{Re}_p := \frac{w_p \cdot d_h}{\nu_p}; \quad \mathrm{Re}_p = 12855.0932568 \tag{24}$$

$$\mathrm{Nu}_p := 0.021 \cdot \mathrm{Re}_p^{0.8} \cdot (Pr_p)^{0.43}; \quad \mathrm{Nu}_p = 34.4713516233 \tag{25}$$

$$\alpha_p := \frac{\mathrm{Nu}_p \cdot \lambda_p}{d_h}; \quad \alpha_p \cdot \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}\right)^{-1} = 10.5837821781 \tag{26}$$

Liczba Reynoldsa dla wody
prędkość przepływu wody

$$w_w := \frac{4 \cdot \dot{m}_w}{\pi \cdot d_{1_w}^2 \cdot \rho_w}; \quad w_w \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{-1} = 0.0471721711779 \tag{27}$$

$$\mathrm{Re}_w := \frac{w_w \cdot d_w}{\nu_w}; \quad \mathrm{Re}_w = 1191.026986 \tag{28}$$

dla $\left(\frac{Pr_w}{Pr_{sw}}\right)^{0.25} := 1$

$$\mathrm{Nu}_w := 0.021 \cdot \mathrm{Re}_w^{0.8} \cdot Pr_w^{0.43}; \quad \mathrm{Nu}_w = 14.0243110106 \tag{29}$$

$$\alpha_w := \frac{\mathrm{Nu}_w \cdot \lambda_w}{d_{1_w}}; \quad \alpha_w \cdot \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}\right)^{-1} = 323.09854982 \tag{30}$$

Grubość ścianki rury $\delta := 0.5 \cdot (d_{2_w} - d_{1_w})$ $\delta \cdot \mathrm{mm}^{-1} = 3.0$
Współczynnik przenikanie ciepła – przybliżenie dla powierzchni płaskiej, ponieważ wartość $d_{2_w}/d_{1_w} = 1.23076923077$ dla czystej rury bez kamienia kotłowego

$$k_p := \left(\frac{1.}{\alpha_p} + \frac{\delta}{\lambda_s} + \frac{1.}{\alpha_w}\right)^{-1}; \quad k_p \cdot \left(\frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right)^{-1} = 10.2402136239 \tag{31}$$

z kamieniem kotłowym

$$k_{p_k} := \left(\frac{1.}{\alpha_p} + \frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{\delta}{\lambda_s} + \frac{1.}{\alpha_w}\right)^{-1}; \quad k_{p_k} \cdot \left(\frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right)^{-1} = 10.0346987071 \tag{32}$$

$$q := \frac{t_{sr_p} - t_{sr_w}}{1/k_p}; \quad q \cdot \left(\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}\right)^{-1} = 1.84094201963 \tag{33}$$

$$q_k := \frac{t_{sr_p} - t_{sr_w}}{1/k_{p_k}}; \quad q_k \cdot \left(\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}\right)^{-1} = 1.80399542262 \tag{34}$$

Temperatura na powierzchni ścianki rury bez kamienia kotłowego od strony wody wynosi

$$t_{s_w} := \frac{q}{\alpha_w} + t_{sr_w}; \quad t_{s_w} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 25.6977724619 \tag{35}$$

z kamieniem kotłowym

$$t_{s_k} := \frac{q_k}{\alpha_w} + t_{sr_w}; \quad t_{s_k} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 25.5834216019 \tag{36}$$

Temperatury czynników wynoszą
$t_{w_1} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 10.0$,
$t_{w_2} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 30.0$,
$t_{p_1} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 220.0$,
$t_{p_2} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 179.6$,
Logarytmiczna różnica temperatur dla przepływy przeciwprądowego

$$\Delta t_{\log} := \frac{(t_{p_1} - t_{w_2}) - (t_{p_2} - t_{w_1})}{\log\left((t_{p_1} - t_{w_2}) / (t_{p_2} - t_{w_1})\right)}; \quad \Delta t_{\log} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 179.606953211 \tag{37}$$

Z bilansu ciepła oblicza się pole powierzchnmi wymminika i jego długość

$$F_p := \frac{\dot{m}_w \cdot c_w \cdot (t_{w_2} - t_{w_1})}{\Delta t_{\log} \cdot k_p}; \quad F_p \cdot (\mathrm{m})^{-2} = 1.13717081856 \tag{38}$$

$$l_p := \frac{F_p}{\pi \cdot d_{1_z}}; \quad l_p \cdot (\mathrm{m})^{-1} = 2.262 \tag{39}$$

Dla wymiennika współprądowego

$$\Delta t'_{\log} := \frac{(t_{p_1} - t_{w_1}) - (t_{p_2} - t_{w_2})}{\log\left((t_{p_1} - t_{w_1}) / (t_{p_2} - t_{w_2})\right)}; \quad \Delta t'_{\log} \cdot {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}^{-1} = 178.096246274 \tag{40}$$

$$F_w := \frac{\dot{m}_w \cdot c_w \cdot (t_{w_2} - t_{w_1})}{\Delta t'_{\log} \cdot k_p}; \quad F_w \cdot (\mathrm{m})^{-2} = 1.14681690532 \tag{41}$$

$$l_w := \frac{F_w}{\pi \cdot d_{1_z}}; \quad l_w \cdot (\mathrm{m})^{-1} = 2.282 \tag{42}$$