

Spis treści

1	Przykłady rozwiązań w CalcTeX-u	1
1.1	Bańka mydlana	1
1.2	Ziemia jako czarna dziura	4
1.3	Gaz płynny	7
1.4	Roztwór gazów	11
1.5	Rozciąganie pręta	14
1.6	Wyptyw ze zbiornika	16
1.7	Roczny koszt gotowania wody na herbatę	19
1.8	Wyptyw okołodźwiękowy ze zbiornika	23
1.9	Równanie Van der Waalsa	27
1.10	Węgiel kammienny	29
1.11	Podgrzewacz wody	34

1 Przykłady rozwiązań w CalcTeX-u

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.1 Bańka mydlana

Jaką pracę trzeba wykonać, aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu $r := 12.5 \cdot \text{cm}$? Współczynnik napięcia powierzchniowego $\sigma := 0.04 \cdot \text{N/m}$.

Obliczenia

Jeśli proces nadmuchiwania bańki uznamy za izotermiczny, to szukana praca W_b wyrazi się poprzez wartość energii ΔE_{pow} traconej na utworzenie powierzchni banki i pracę W_{spr} potrzebną do sprężania powietrza wewnątrz bańki do ciśnienie p :

$$W_b := \Delta E_{pow} + W_{spr}$$

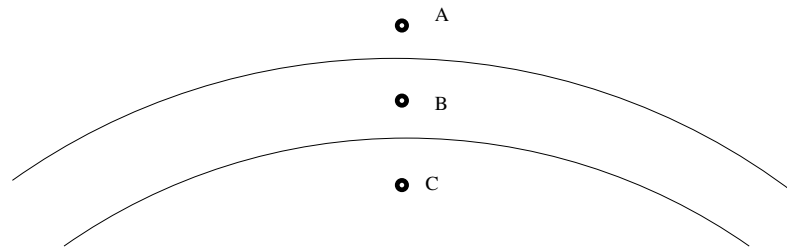
Ciśnienie p jest ciśnieniem powietrza wewnątrz bańki. Aby je obliczyć, rozważmy element błonli (rys. 1). Wiadomo, że przy przejściu przez kulistą powierzchnię cieczy ciśnienie zmienia się skokowo, przy czym wartość zmiany

$$\Delta p := \frac{2 \cdot \sigma}{r}; \quad \Delta p \cdot \text{Pa}^{-1} = 0.64$$

Zatem

$$p_b - p_a = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

$$p_c - p_b = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$



Rysunek 1: Element błonki

gdzie: p_a jest zewnętrznym ciśnieniem powietrza na bańkę, p_b – ciśnienie wewnątrz błonki, p_c – szukane ciśnienie powietrza wewnątrz błonki. $p_o := 1 \cdot \text{atm}$ Pamiętając, że $p_a := p_o$ otrzymamy:

$$p := p_o + \frac{4 \cdot \sigma}{r}; \quad p \cdot \text{kPa}^{-1} = 101.32628$$

Energia zużyta na utworzenie powierzchni bańki o powierzchni

$$A_b := 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2; \quad A_b \cdot (\text{cm})^{-2} = 3926.99081699$$

i objętości

$$V_b := \frac{4.0}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\Delta E_{pow} := \sigma \cdot A_b, \quad \Delta E_{pow} \cdot \text{J}^{-1} = 0.0157079632679$$

gdzie A_b jest sumą wewnętrzną i zewnętrzną powierzchni bańki. Szukaną pracę możemy obliczyć ze wzoru

$$W_b := \Delta E_{pow} + W_{spr}; \quad W_b := \sigma \cdot A_b + p \cdot V_b \cdot \log\left(\frac{p}{p_o}\right); \quad W_b \cdot \text{J}^{-1} = 0.0261800049239$$

lub podstawiając

$$W_b := 8 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sigma + p_o \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot \sigma}{r \cdot p_o}\right) \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \cdot \log\left(1 + \frac{4 \cdot \sigma}{r \cdot p_o}\right); \quad W_b \cdot \text{J}^{-1} = 0.0261800049239$$

Odp.: Aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu $r \cdot \text{cm}^{-1} = 12.5$ należy wykonać pracę $W_b \cdot \text{mJ}^{-1} = 26.1800049239$.

`{\scriptsize`

`% Copyright CalcTeX@onet.eu`

`Obliczenia wykonane za pomocą pakietu`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\`

`Jestem otwarty na wszelkie uwagi:`

`\EmailToCalcTeX}`

`\Zadanie{Bańka mydlana}`

Jaką pracę trzeba wykonać, aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu


```

\]
\[
\Delta E_{\text{pow}}:=\sigma\cdot A_b
",\;\;\;"
\Delta E_{\text{pow}}\cdot \text{oJ}
\]
gdzie "$A_b$" jest sumą wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnią bańki.
Szukaną pracę możemy obliczyć ze wzoru
\[
"W_b:=\Delta E_{\text{pow}}+W_{\text{spr}};\;\;"
W_{\text{b}}:=\sigma\cdot A_b + p\cdot V_b \cdot \log\left(\frac{p}{p_o}\right)
";\;\;"
W_b\cdot \text{oJ}
\]
lub podstawiając
\[
W_b:=8\cdot\pi\cdot r^2\cdot\sigma+p_o\cdot\left(1+\frac{4\cdot\sigma}{r\cdot p_o}\right)
";\;\;"
W_b\cdot \text{oJ}]
{\bf Odp.:} Aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu $r\cdot \text{cm}$
należy wykonać pracę $W_b\cdot \text{mJ}".$

```

Poniższe obliczenia przeprowadzono przy użyciu pakietu CalcTeX.
<http://sg.bzip.pl/CalcTeX/>

1.2 Ziemia jako czarna dziura

Jeżeli udałoby się ścisnąć kulę ziemską do dowolnych rozmiarów, to przy jakim promieniu stałaby się czarną dziurą oraz ile, zgodnie z teorią newtonowską, wynosiłaby siła przyciągania ziemskiego dla masy $m_p := 4.64 \cdot \mu\text{gm}$ na powierzchni tak powstałej czarnej dziury?

Obliczenia

Wiemy, że czarna dziura to obiekt dla którego prędkość ucieczki jest co najmniej równa prędkości światła.

Dane:

$c := 299792458.0 \cdot \text{m/s}$ – prędkość światła

$G := 6.673231 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ – stała grawitacji

$M := 5.9736 \cdot 10^{24} \cdot \text{kg}$ – masa Ziemi

$r := 6373.14 \cdot \text{km}$ – promień Ziemi

Sprawdzenie stałych fizycznych poprzez obliczenie przyspieszenia ziemskiego

$$g_z := G \cdot \frac{M}{r^2}; \quad g_z \cdot (\text{m/sec}^2)^{-1} = 9.81443672259 \quad (1)$$

Jak widać z równania (1) wartość przyspieszenia ziemskiego jest akceptowalna więc można przypuszczać, że stałe są poprawne.

Prędkość ucieczki dla ciała o masie M i promieniu r obliczamy z poniższej zależności (2):

$$v := \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} \quad (2)$$

Czyli dla Ziemi prędkość ucieczki wynosi: $v \cdot (\text{km/s})^{-1} = 11.1847019857$.

Ziemia stanie się czarna dziurą, gdy prędkość ucieczki będzie conajmniej równa prędkości światła, czyli:

$$c := \sqrt{2 \cdot G \cdot M / r} \Leftrightarrow \quad (3)$$

$$r_c := (2 \cdot G \cdot M) / c^2 \quad (4)$$

podstawiając, promień ściśniętej Ziemi – czarnej dziury, wówczas wyniesie: $r_c \cdot \text{mm}^{-1} = 8.87076116938$.

Pszypieszenie ziemskie ma powierzchni tak powstałej czarnej dziury wynosi:

$$g_c := G \cdot \frac{M}{r_c^2}; \quad g_c \cdot (\text{m/sec}^2)^{-1} = 5.06582897215e + 18$$

Newtonowska siła przyciągania dla masy $m_p \cdot \text{kg}^{-1} = 4.64e - 09$ na powierzchni czarnej dziury wyniesie:

$$F_c := m_p \cdot g_c; \quad F_c \cdot (\text{GN})^{-1} = 23.5054464308$$

Odp.: Ziemia stanie się czarną dziurą jeśli ściśniemy ją do kuli o promieniu conajmniej $r_c \cdot \text{mm}^{-1} = 8.87076116938$ a na jej powierzchni na ciało o masie $m_p \cdot \mu\text{gm}^{-1} = 4.64$ zgodnie z teorią newtonowską, zadziała siła $F_c \cdot \text{GN}^{-1} = 23.5054464308$.

% Ostatnia zmiana 2008-09-20

\noindent

Poniższe obliczenia przeprowadzono przy użyciu pakietu

\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX/en.html}{Calc\TeX}.\

\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX/}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX/}

\Zadanie{Ziemia jako czarna dziura}

Jeżeli udałoby się ścisnąć kulę ziemską do dowolnych rozmiarów,

to przy jakim promieniu stałaby się czarną dziurą oraz

ile, zgodnie z teorią newtonowską,

%, $m_p=1.6726231e-27 \cdot \text{kg}$

wynosiłaby siła przyciągania ziemskiego dla masu

$m_p=4.64 \cdot \mu\text{gm}$

%, $m_e=9.1093897e-31 \cdot \text{kg}$

na powierzchni tak powstałej czarnej dziury?

\Obliczenia{}

Wiemy, że czarna dziura to obiekt dla którego prędkość

ucieczki jest conajmniej równa prędkości światła.\

Dane:\

%, $c=3 \cdot 10^8 \cdot \text{m/s}$

```

$c:= 299 792 458.0\cdot\m/\s$ -- prędkość światła\\
$G:= 6.673231\cdot 10^{-11}\cdot\m^3/(\kg\cdot\s^2)$ -- stała grawitacji\\
$M:= 5.9736\cdot 10^{24}\cdot \kg$ -- masa Ziemi\\
$r:= 6373.14\cdot\km$ -- promień Ziemi\\"[2ex]"

```

Sprawdzenie stałych fizycznych poprzez obliczenie przyspieszenia ziemskiego

```

\begin{equation}
g_z:=G\cdot \frac{M}{r^2}
";\;\;\;\; \label{gz}"
g_z\cdot(\m/\sec^2)^{-1}
\end{equation}

```

Jak widać z równania ([\ref{gz}](#)) wartość przyspieszenia ziemskiego jest akceptowalna więc można przypuszczać, że stałe są poprawne. \\ Prędkość ucieczki dla ciała o masie "\$M\$" i promieniu "\$r\$" obliczamy z poniższej zależności ([\ref{v2}](#)):

```

\begin{equation}
v:=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}}
"\label{v2}"
\end{equation}

```

Czyli dla Ziemi prędkość ucieczki wynosi: $v\cdot(\km/\s)^{-1}$."

Ziemia stanie się czarną dziurą, gdy prędkość ucieczki będzie co najmniej równa prędkości światła, czyli:

```

"
\begin{equation}
c:=\sqrt{2\cdot G\cdot M/r}
\Leftarrow "
r:=\left( 2\cdot G\cdot M_z\right)/c^2
"
\label{v=c}"
\end{equation}

```

```

\begin{equation}
r_c:=\left( 2\cdot G\cdot M\right)/c^2
\end{equation}

```

podstawiając, promień ściśniętej Ziemi -- czarnej dziury, wówczas wyniesie: $r_c\cdot\omm$."

Przyspieszenie ziemskie na powierzchni tak powstałej czarnej dziury wynosi:

```

\[
g_{c}:=G\cdot \frac{M}{r_c^2}
";\;\;\;\;"
g_c\cdot(\m/\sec^2)^{-1}
\]

```

Newtonowska siła przyciągania dla masy $m_p\cdot \okg$ na powierzchni czarnej dziury wyniesie:

```

\[
F_c:=m_p\cdot g_c
";\;\;\;\;"
F_c\cdot (\GN)^{-1}

```

\]

{\bf Odp.:}

Ziemia stanie się czarną dziurą jeśli ściśniemy ją do kuli o promieniu conajmniej

$r_c \cdot \omega$ a na jej powierzchni na ciało o masie

$m_p \cdot \omega_{\text{ugm}}$ zgodnie z teorią newtonowską, zadziała siła $F_c \cdot \omega_{\text{GN}}$.

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.3 Gaz płynny

Tak zwany gaz płynny składa się z $r_{C_3H_8} := 80 \cdot \%$ propanu i w reszcie z butanu. Oblicz ilość powietrza do spalania, przy jego nadmiarze $Z := 5 \cdot \%$ oraz ilość i skład spalin wilgotnych i suchych.

Obliczenia

$\lambda_p := 1 + Z$ – współczynnik nadmiaru powietrza

$$\lambda_p = 1.05$$

$r_{C_4H_{10}} := 100.0 \cdot \% - r_{C_3H_8}$ – udział butanu w gazie płynnym

$$r_{C_4H_{10}} = 0.2$$

Skład powietrza:

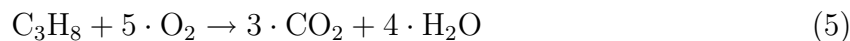
$r_{air_{O_2}} := 21 \cdot \%$ – udział tlenu

$$r_{air_{O_2}} = 0.21$$

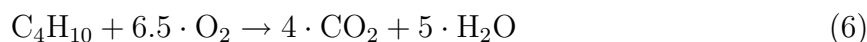
$r_{air_{N_2}} := 100 \cdot \% - r_{air_{O_2}}$ – udział azotu

$$r_{air_{N_2}} = 0.79$$

Spalanie obu składników gazu płynnego odbywa się według równań:



$$n_{i1O_2} := 5.0 \quad n_{o1CO_2} := 3.0 \quad n_{o1H_2O} := 4.0$$



$$n_{i2O_2} := 6.5 \quad n_{o2CO_2} := 4.0 \quad n_{o2H_2O} := 5.0$$

Ilość tlenu do spalania:

$$V_{O_2} := n_{i1O_2} \cdot r_{C_3H_8} + n_{i2O_2} \cdot r_{C_4H_{10}}; \quad V_{O_2} \cdot \left(\frac{\text{um}^3}{\text{um}_{\text{pal}}^3}\right)^{-1} = 5.3$$

um_{pal} – umowny metr sześcienny paliwa

Ilość powietrza:

$$V_{air_{min}} := V_{O_2} / r_{air_{O_2}}; \quad V_{air_{min}} \cdot \left(\frac{\text{um}^3}{\text{um}_{\text{pal}}^3}\right)^{-1} = 25.2380952381$$

Rzeczywista ilość powietrza:

$$V_{air} := \lambda_p \cdot V_{air_{min}}; \quad V_{air} \cdot \left(\frac{\text{um}^3}{\text{um}_{\text{pal}}^3}\right)^{-1} = 26.5$$

Objętości składników spalin:

$$V_{CO_2} := 3 \cdot r_{C_3H_8} + 4 \cdot r_{C_4H_{10}}; \quad V_{CO_2} \cdot \left(\frac{\text{um}^3}{\text{um}_{\text{pal}}^3}\right)^{-1} = 3.2$$

$$V_{H_2O} := 4 \cdot r_{C_3H_8} + 5 \cdot r_{C_4H_{10}}; \quad V_{H_2O} \cdot \left(\frac{\text{um}^3}{\text{um}_{\text{pal}}^3}\right)^{-1} = 4.2$$

$$V_{N_2} := r_{air_{N_2}} \cdot V_{air}; \quad V_{N_2} \cdot (\text{um}^3/\text{um}_{\text{pal}}^3)^{-1} = 20.935$$

$$V_{O_2} := r_{air_{O_2}} \cdot (\lambda_p - 1) \cdot V_{air_{min}}; \quad V_{O_2} \cdot (\text{um}^3/\text{um}_{\text{pal}}^3)^{-1} = 0.265$$

Objętość spalin całkowitych

$$V_{sp} := V_{CO_2} + V_{H_2O} + V_{N_2} + V_{O_2}; \quad V_{sp} \cdot (\text{um}^3/\text{um}_{\text{pal}}^3)^{-1} = 28.6$$

Objętość spalin suchych

$$V_{sp_{such}} := V_{sp} - V_{H_2O}; \quad V_{sp_{such}} \cdot (\text{um}^3/\text{um}_{\text{pal}}^3)^{-1} = 24.4$$

Skład spalin wilgotnych

$$r_{CO_2}^{wil} := \frac{V_{CO_2}}{V_{sp}}; \quad r_{CO_2}^{wil} \cdot \%^{-1} = 11.1888111888$$

$$r_{H_2O}^{wil} := \frac{V_{H_2O}}{V_{sp}}; \quad r_{H_2O}^{wil} \cdot \%^{-1} = 14.6853146853$$

$$r_{N_2}^{wil} := \frac{V_{N_2}}{V_{sp}}; \quad r_{N_2}^{wil} \cdot \%^{-1} = 73.1993006993$$

$$r_{O_2}^{wil} := \frac{V_{O_2}}{V_{sp}}; \quad r_{O_2}^{wil} \cdot \%^{-1} = 0.926573426573$$

Razem

$$(r_{CO_2}^{wil} + r_{H_2O}^{wil} + r_{N_2}^{wil} + r_{O_2}^{wil}) \cdot \%^{-1} = 100.0$$

Skład spalin suchych

$$r_{CO_2}^{such} := \frac{V_{CO_2}}{V_{sp_{such}}}; \quad r_{CO_2}^{such} \cdot \%^{-1} = 13.1147540984$$

$$r_{N_2}^{such} := \frac{V_{N_2}}{V_{sp_{such}}}; \quad r_{N_2}^{such} \cdot \%^{-1} = 85.7991803279$$

$$r_{O_2}^{such} := \frac{V_{O_2}}{V_{sp_{such}}}; \quad r_{O_2}^{such} \cdot \%^{-1} = 1.08606557377$$

Razem

$$(r_{CO_2}^{such} + r_{N_2}^{such} + r_{O_2}^{such}) \cdot \%^{-1} = 100.0$$

`{\scriptsize`

`% Copyright CalcTeX@onet.eu`

`Obliczenia wykonane za pomocą pakietu`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{Calc\TeX} \hfill \today\`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\`

`Jestem otwarty na wszelkie uwagi:`

`\EmailToCalcTeX}`

`%\newcommand{\propan}{\rm C_3H_8}`

`%\newcommand{\butan}{\rm C_4H_{10}}`

`%\newcommand{\woda}{\rm H_2O}`

`%\newcommand{\codwa}{\rm CO_2}`

```

%\newcommand{\rwet}{r^{wet}}
%\newcommand{\rdry}{r^{dry}}
%\newcommand{\rwil}{r^{wil}}
%\newcommand{\rsuch}{r^{such}}
%\ \noindent {\Large \bf Gaz płynny}[2ex]}
\Zadanie{Gaz płynny}

```

Tak zwany gaz płynny składa się z $r_{\text{C}_3\text{H}_8} = 80\%$ propanu i reszcie z butanu. Oblicz ilość powietrza do spalania, przy jego nadmiarze $Z = 5\%$ oraz ilość i skład spalin wilgotnych i suchych.

\Obliczenia{}

```

$\lambda_p = 1 + Z$ -- współczynnik nadmiaru powietrza \hfill $\lambda_p$
$r_{\text{C}_4\text{H}_{10}} = 100.0\% \cdot r_{\text{C}_3\text{H}_8}$
-- udział butanu w gazie płynnym \hfill $r_{\text{C}_4\text{H}_{10}}$
Skład powietrza:
$r_{\text{air}_{\text{O}_2}} = 21\%$ -- udział tlenu \hfill $r_{\text{air}_{\text{O}_2}}$
$r_{\text{air}_{\text{N}_2}} = 100\% \cdot r_{\text{air}_{\text{O}_2}}$ -- udział azotu \hfill $r_{\text{air}_{\text{N}_2}}$
\
Spalanie obu składników gazu płynnego odbywa się według równań:
\begin{equation}
\text{C}_3\text{H}_8 + 5\text{O}_2 \rightarrow 3\text{CO}_2 + 4\text{H}_2\text{O}
\label{z16.7r1}
\end{equation}
[ n_{\text{O}_2} = 5.0
";";";"
n_{\text{CO}_2} = 3.0
";";";"
n_{\text{H}_2\text{O}} = 4.0 \ ]
\begin{equation}
\text{C}_4\text{H}_{10} + 6.5\text{O}_2 \rightarrow 4\text{CO}_2 + 5\text{H}_2\text{O}
\label{z16.7r2}
\end{equation}
[ n_{\text{O}_2} = 6.5
";";";"
n_{\text{CO}_2} = 4.0
";";";"
n_{\text{H}_2\text{O}} = 5.0 \ ]
Ilość tlenu do spalania:
[V_{\text{O}_2} = n_{\text{O}_2} \cdot r_{\text{C}_3\text{H}_8} + n_{\text{O}_2} \cdot r_{\text{C}_4\text{H}_{10}}
";";";";"
V_{\text{O}_2} \cdot \left( \frac{\text{um}^3}{\text{umpal}^3} \right)^{-1}
$"\umpal"$ -- umowny metr sześcienny paliwa
Ilość powietrza:
[V_{\text{air}_{\text{min}}} = V_{\text{O}_2} / r_{\text{air}_{\text{O}_2}}
";";";";"
V_{\text{air}_{\text{min}}} \cdot \left( \frac{\text{um}^3}{\text{umpal}^3} \right)^{-1}

```

```

\]
Rzeczywista ilość powietrza:
\[
V_{air}:= \lambda_p \cdot V_{air_{min}}
";\;\;\;"
V_{air} \cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}\]
Objętości składników spalin:
\[
V_{CO_2}:=3\cdot r_{C_3H_8}+4\cdot r_{C_4H_{10}}
";\;\;\;"
V_{CO_2}\cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}\]
\[
V_{H_2O}:=4 \cdot r_{C_3H_8} + 5\cdot r_{C_4H_{10}}
";\;\;\;"
V_{H_2O}\cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}\]
\[
V_{N_2}:=r_{air_{N_2}}\cdot V_{air}
";\;\;\;"
V_{N_2}\cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}\]
\[
V_{O_2}:=r_{air_{O_2}}\cdot (\lambda_p-1)\cdot V_{air_{min}}
";\;\;\;"
V_{O_2}\cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}
\]
Objętość spalin całkowitych
\[
V_{sp}:=V_{CO_2}+V_{H_2O} +V_{N_2}+V_{O_2}
";\;\;\;"
V_{sp}\cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}
\]
Objętość spalin suchych
\[V_{sp_{such}}:=V_{sp}-V_{H_2O}
";\;\;\;"
V_{sp_{such}}\cdot \left(\frac{\mu^3}{\text{umpal}^3}\right)^{-1}
\]
Skład spalin wilgotnych
\[
\rwil_{CO_2}:=\frac{V_{CO_2}}{V_{sp}}
";\;\;\;"
\rwil_{CO_2}\cdot \text{opercent}
\]
\[
\rwil_{H_2O}:=\frac{V_{H_2O}}{V_{sp}}
";\;\;\;"
\rwil_{H_2O}\cdot \text{opercent}
\]
\[
\rwil_{N_2}:=\frac{V_{N_2}}{V_{sp}}
";\;\;\;"
\rwil_{N_2}\cdot \text{opercent}
\]
\[
\rwil_{O_2}:=\frac{V_{O_2}}{V_{sp}}
";\;\;\;"
\rwil_{O_2}\cdot \text{opercent}

```

\]

Razem\hfill\$\left(\rwil_{\text{CO}_2}+\rwil_{\text{H}_2\text{O}}+\rwil_{\text{N}_2}+\rwil_{\text{O}_2}\right)\cdot\text{percent}\$

\]

Skład spalin suchych

\[\rsuch_{\text{CO}_2}:=\frac{V_{\text{CO}_2}}{V_{\text{sp}_{\text{such}}}}\]

";\;\;\;\;\;"

\rsuch_{\text{CO}_2}\cdot \text{percent}

\[\rsuch_{\text{N}_2}:=\frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{sp}_{\text{such}}}}\]

";\;\;\;\;\;"

\rsuch_{\text{N}_2}\cdot \text{percent}

\[\rsuch_{\text{O}_2}:=\frac{V_{\text{O}_2}}{V_{\text{sp}_{\text{such}}}}\]

";\;\;\;\;\;"

\rsuch_{\text{O}_2}\cdot \text{percent}

\]Razem \hfill \$\left(\rsuch_{\text{CO}_2}+\rsuch_{\text{N}_2}+\rsuch_{\text{O}_2}\right)\cdot\text{percent}\$

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.4 Roztwór gazów

Roztwór gazowy składa się objętościowo z $r_1 := 40.0/100$ z tlenu ($M_1 := 32$ kg/kmol, $\kappa_1 := 1.4$) oraz w pozostałej części z argonu ($M_2 := 40$ kg/kmol, $\kappa_2 := 1.667$). Obliczyć: masę molową, stałą gazową, ciepła właściwe c_p , c_v , stosunek ciepł właściwych (κ_r) dla roztworu.

Obliczenia

Dane:

$$M_1 = 32\text{kg/kmol}, \quad M_2 = 40\text{kg/kmol},$$

$$\kappa_1 = 1.4, \quad \kappa_2 = 1.667,$$

$$r_1 = 0.4, \quad r_2 := 1.0 - r_1, \quad r_2 = 0.6$$

Obliczam zastępczą masę molową roztworu:

Szukane:

$$R_r, M_r, \kappa_r, c_{p_r}, c_{v_r}.$$

$$M_r := r_1 \cdot M_1 + r_2 \cdot M_2, \quad M_r = 36.8\text{kg/kmol} \quad (7)$$

Obliczam stałą gazową roztworu, dla uniwersalnej stałej gazowej $\tilde{R} := 8314.3\text{J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$:

$$R_r := \frac{\tilde{R}}{M_r} \quad (8)$$

$$\frac{\text{J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})}{\text{kg/kmol}} = \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot \frac{\text{kmol}}{\text{kg}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad R_r = 225.932065217 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (9)$$

Obliczam ciepła właściwe roztworu:

$$g_1 := r_1 \cdot \frac{M_1}{M_r}, \quad g_1 = 0.347826086957 \quad (10)$$

$$g_2 := r_2 \cdot \frac{M_2}{M_r}, \quad g_2 = 0.652173913043 \quad (11)$$

$$c_{v_1} := \frac{\tilde{R}}{(\kappa_1 - 1) \cdot M_1}, \quad c_{v_1} = 649.5546875 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (12)$$

$$c_{v_2} := \frac{\tilde{R}}{(\kappa_2 - 1) \cdot M_2}, \quad c_{v_2} = 311.630434783 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (13)$$

$$c_{v_r} := g_1 \cdot c_{v_1} + g_2 \cdot c_{v_2}, \quad c_{v_r} = 429.169305293 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (14)$$

$$c_{p_r} := c_{v_r} + R_r, \quad c_{p_r} = 655.10137051 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (15)$$

Obliczam stosunek ciepł właściwych dla roztworu

$$\kappa_r := \frac{c_{p_r}}{c_{v_r}}; \quad \kappa_r = 1.52644041042 \quad (16)$$

Odp: Roztwór charakteryzują następujące stałe: masa molowa: $M_r = 36.8 \text{ kg/kmol}$, stała gazowa: $R_r = 225.932065217 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, ciepła właściwe: $c_{p_r} = 655.10137051 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $c_{v_r} = 429.169305293 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ oraz stosunek ciepł właściwych: $\kappa_r = 1.52644041042$.

```
{\scriptsize
% Copyright CalcTeX@onet.eu
Obliczenia wykonane za pomocą pakietu
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{Calc\TeX} \hfill \today\
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\
Jestem otwarty na wszelkie uwagi:
\EmailToCalcTeX}

\Zadanie{Roztwór gazów}
\label{roztwor}
Roztwór gazowy składa się objętościowo
z~$r_1:=40.0/100$
%z~$r_1:=40\cdot\text{percent}$
z~tlenu ( $M_{\{1\}}:=32\text{kg/kmol}$ ,  $\kappa_{\{1\}}:=1.4$ )
oraz w~pozostałej części z~argonu ( $M_{\{2\}}:=40\text{kg/kmol}$ ,  $\kappa_{\{2\}}:=1.667$ ).
Obliczyć:
%\begin{itemize}
%\item
masę molową,
%\item
stałą gazową,
%\item
ciepła właściwe "$c_p,\;\;\; c_v,$"
%\item
stosunek ciepł właściwych"$(\kappa_r)$" dla roztworu.
%\end{itemize}

\Obliczenia{}

\begin{tabular}{lll}
Dane: & & Szukane:\end{pre>

```

```

$M_{1}$\un{kg/kmol}, "$ & $M_{2}$\un{kg/kmol}, "$ & $R_r$, "$ $M_r$, "$ $\kappa_r$, "$ $c_{p}$
$\kappa_{1}$", "$ & $\kappa_{2}$", "$ & \\\
$r_{1}$", "$ & $r_{2}:=1.0- r_{1}$", "$ $r_2$\\
%$r_{1}$", "$ & $r_{2}:=100\cdot\percent- r_{1}$", "$ $r_2\cdot\opercent$\\
\end{tabular}
\\
Obliczam zastępczą masę molową roztworu:
\begin{equation}
M_r:=r_{1}\cdot M_1 +r_2\cdot M_2
",\;\;\;\;"
M_r
"\un{kg/kmol}"
\end{equation}
Obliczam stałą gazową roztworu,
dla uniwersalnej stałej gazowej $\Ru:=8314.3$\un{J/(kmol\cdot K)}: "$
\begin{equation}
R_r:=\frac{\Ru}{M_r}
\end{equation}
\begin{equation}
"{\un{\frac{J}{(kmol\cdot K)}}{kg/kmol}}
=
\frac{J}{kmol\cdot K}\cdot \frac{kmol}{kg}
=\frac{J}{kg \cdot K}}
"
",\;\;\;\;"
R_r
%"\un{J/(kg\cdot K)}"
"\un{\frac{J}{kg \cdot K}}"
\end{equation}
Obliczam ciepła właściwe roztworu:
\begin{equation}
g_1:=r_1\cdot \frac{M_1}{M_r}
",\;\;\;\;"
g_1
\end{equation}
\begin{equation}
g_2:=r_2\cdot \frac{M_2}{M_r}
",\;\;\;\;"
g_2
\end{equation}
%Obliczam ciepła właściwego
\begin{equation}
c_{v_{1}}:=\frac{\Ru}{\left(\kappa_{1}-1\right)}\cdot M_1
",\;\;\;\;"
c_{v_{1}}
%"\un{\frac{J}{\left(kg\cdot K\right)}}"
"\un{\frac{J}{kg\cdot K}}"
\end{equation}
\begin{equation}

```

```

c_{v_{2}}:=\frac{\Ru}{\left(\kappa_{2-1}\right)\cdot M_{2}}
",\;\;\;"
c_{v_{2}}
%\un{\frac{J}{\left(\text{kg}\cdot K\right)}}
"\un{\frac{J}{\text{kg}\cdot K}}"
\end{equation}

\begin{equation}
c_{v_{r}}:=g_{1}\cdot c_{v_{1}}+g_{2}\cdot c_{v_{2}}
",\;\;\;"
c_{v_{r}}
%\un{\frac{J}{\left(\text{kg}\cdot K\right)}}
"\un{\frac{J}{\text{kg}\cdot K}}"
\end{equation}

\begin{equation}
c_{p_{r}}:=c_{v_{r}}+R_{r}
",\;\;\;"
c_{p_{r}}
%\un{\frac{J}{\left(\text{kg}\cdot K\right)}}
"\un{\frac{J}{\text{kg}\cdot K}}"
\end{equation}

Obliczam stosunek ciepł właściwych dla roztworu
\begin{equation}
\kappa_{r}:=\frac{c_{p_{r}}}{c_{v_{r}}}
";\;\;\;"
\kappa_{r}
\end{equation}

Odp: Roztwór charakteryzują następujące stałe:
masa molowa:                $M_r"\un{kg/kmol}$,"$
stała gazowa:                $R_r"\un{J/(kg\cdot K)}$,"$
ciepła właściwe:            $c_{p_r}"\un{J/(kg\cdot K)}$,"$
                                $c_{v_r}"\un{J/(kg\cdot K)}$"$
oraz stosunek ciepł właściwych:    $\kappa_r$."$

```

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.5 Rozciąganie pręta

Jak długi powinien być stalowy pręt, by zawieszony swobodnie uległ zerwaniu pod wpływem własnego ciężaru?

Obliczenia

Dla stali mamy:

$R_r := 500.0 \cdot \text{MPa}$ – maksymalne naprężenie rozciągające dla stali,

$\rho := 7850.0 \cdot \text{kg/m}^3$ – gęstość stali ($\rho \cdot (\text{gm/cm}^3)^{-1} = 7.85$.)

Zakładając, że przyspieszenie ziemskie jest stałe dla całej długości pręta oraz jest równe

średniemu normalnemu przyspieszeniu ziemskiemu, które wynosi: $g_n \cdot (\text{m/s}^2)^{-1} = 9.80665$ oraz wiedząc, że:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{S} = \frac{S \cdot l \cdot \rho \cdot g}{S} = l \cdot \rho \cdot g \quad (17)$$

gdzie:

F – siła,

σ – naprężenie,

V – objętość,

S – pole przekroju poprzecznego pręta.

Dla $\sigma := R_r$ i przekształcając (17) mamy:

$$l := \frac{\sigma}{\rho \cdot g_n} \Rightarrow l \cdot \text{km}^{-1} = 6.49500772597 \quad (18)$$

Odp.:

Zwisający swobodnie pręt zerwie się jeżeli jego długość przekroczy $l \cdot \text{km}^{-1} = 6.49500772597$ lub wyrażając długość w milach $l \cdot \text{mile}^{-1} = 4.03581069428$.

`{\scriptsize`

`% Copyright CalcTeX@onet.eu`

`Obliczenia wykonane za pomocą pakietu`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\`

`Jestem otwarty na wszelkie uwagi:`

`\EmailToCalcTeX}`

`\Zadanie{Rozciąganie pręta}`

Jak długi powinien być stalowy pręt, by zawieszony swobodnie uległ zerwaniu pod wpływem własnego ciężaru?

`\Obliczenia{}`

`Dla stali mamy:\`

`\$R_r := 500.0 \cdot \text{MPa}`

`-- maksymalne naprężenie rozciągające dla stali,\`

`\$rho:= 7850.0 \cdot \text{kg/m}^3 \$ -- gęstość stali (\$rho \cdot \left(\text{gm/cm}^3\right)^{-1}`.

Zakładając, że przyspieszenie ziemskie jest stałe

dla całej długości pręta oraz jest równe średniemu

normalnemu przyspieszeniu ziemskiemu, które wynosi:

`\$g_n \cdot \left(\text{m/s}^2\right)^{-1}` oraz wiedząc, że:

"

`\begin{equation}`

`\sigma = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} =`

`\frac{V \cdot \rho \cdot g}{S} =`

`\frac{S \cdot l \cdot \rho \cdot g}{S} = l \cdot \rho \cdot g`

```

\label{eq-sigma}
\end{equation}
"
gdzie: \
"$F"$ -- siła,\
"$\sigma"$ -- naprężenie, \
"$V"$ -- objętość,\
"$S"$ -- pole przekroju poprzecznego pręta.\
Dla $\sigma=R_r$ i przekształcając (\ref{eq-sigma}) mamy:
\begin{equation}
l:=\frac{\sigma}{\rho \cdot g_n}
"\;\;\;\;\;\rightarrow"
l \cdot \text{okm}
"\label{l-max}"
\end{equation}
{\bf Odp.:} \
Zwisający swobodnie pręt zerwie się jeżeli jego długość
przekroczy $l \cdot \text{okm}$ lub wyrażając długość
w milach $l \cdot \text{omile}$. "$

```

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.6 Wyływ ze zbiornika

Z otwartego zbiornika wypływa woda przez przewód o długości $l_p := 200 \cdot \text{m}$ i średnicy $d := 100.0 \cdot \text{mm}$. Jaka powinna być wysokość H (patrz rys. 2) poziomu cieczy w zbiorniku, aby objętościowy strumień wypływu cieczy wynosił: $\dot{V} := 40.0 \cdot \text{l/s} \dots \dot{V} \cdot (\text{m}^{-1})^3 / \text{hr}^{-1} = 144.0?$

Dane: $h := 2 \cdot \text{m}$, $\nu := 1 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $\xi_w := 0.5$, $\xi_k := 0.2$, $\xi_z := 5.0$, $g := g_n$, $g \cdot (\text{m/s})^{-1} = 9.80665$

Obliczenia

Pole powierzchni przekroju kanału

$$A_p := \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad A_p \cdot \text{cm}^{-2} = 78.5398163397$$

Prędkość wypływu

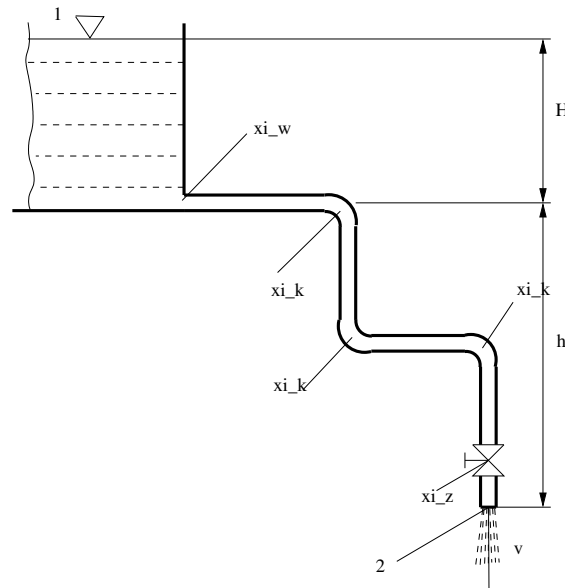
$$\dot{V} = \frac{V}{\tau} = \frac{A \cdot x}{\tau} = A \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} := \dot{V}/A_p; \quad \vec{v} \cdot \text{m}^{-1}/\text{s}^{-1} = 5.09295817894$$

Liczba Reynoldsa

$$\text{Re} := \frac{\vec{v} \cdot d}{\nu}; \quad \text{Re} = 509295.817894$$

Z formuły Blasusa obliczymy współczynnik strat linowych

$$\lambda_l := \frac{0.3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}}; \quad \lambda_l = 0.0118438786033$$



Rysunek 2: Zbiornik

Szukaną wysokość H wyznaczmy z uogólnionego równania Bernuliego dla przekrojów 1 i 2 (rys. 2):

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_b}{\gamma} + h + H = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_b}{\gamma} + \sum h_s \quad (19)$$

ponieważ $v_1 := 0$ $v_2 := \vec{v}$ oraz

$$\sum h_s := \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\xi_w + 3 \cdot \xi_k + \xi_z + \lambda_l \frac{l_p}{d} \right)$$

zatem

$$H := \frac{\vec{v}^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1 + \xi_w + 3 \cdot \xi_k + \xi_z + \lambda_l \cdot \frac{l_p}{d} \right) - h; \quad H \cdot \text{m}^{-1} = 38.7162340085$$

Odp.: Aby objętościowy strumień wypływu cieczy ze zbiornika (patrz rys. 2) wynosił $\dot{V} \cdot \text{l}^{-1}/\text{s}^{-1} = 40.0$ to wysokość H powinna przyjąć wartość $H \cdot \text{m}^{-1} = 38.7162340085$.

```
{\scriptsize
% Copyright CalcTeX@onet.eu
Obliczenia wykonane za pomocą pakietu
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\\
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\
Jestem otwarty na wszelkie uwagi:
\EmailToCalcTeX}

\Zadanie{Wypływ ze zbiornika}
%-----
Z otwartego zbiornika wypływa woda przez przewód o długości
$l_p:=200\text{m}$ i średnicy
```

```

$d:=100.0\cdot \text{mm}."$
Jaka powinna być wysokość
"$H"$ (patrz rys. \ref{zbiornik})
poziomu cieczy w~zbiorniku, aby objętościowy strumień wypływu  cieczy
wynosił:
$sV:=40.0\cdot \text{liter}/\text{s}$ \dotfill $sV\cdot (\text{om})^3/\text{ohr}?"$
\\
Dane:
$h:=2\cdot \text{m},"$
$\nu :=1\cdot 10^{-6} \cdot \text{meter}^2/\text{s},"$
$\xi_w:=0.5","$
$\xi_k:=0.2","$
$\xi_z:=5.0","$
$g:=g_n","$
$g\cdot (\text{m}/\text{s})^{-1}$
\begin{figure}
\begin{center}
\includegraphics[scale=0.65, angle=-90]{figs/zbiornik}
\caption{Zbiornik}
\label{zbiornik}
\end{center}
\end{figure}

\Obliczenia{}

Pole powierzchni przekroju kanału
\[A_p:=\frac{\pi\cdot d^2}{4}
";\;;;"
A_p\cdot\text{cm}^{-2}
\]
Prędkość wypływu
\[
"
\dot V=\frac{V}{\tau}=\frac{A\cdot x}{\tau}=A\cdot \vec v
\leftarrow
"
\vv:=sV/A_p
";\;;;"
\vv\cdot \text{om}/\text{os}
\]
Liczba Reynoldsa
%$d$ \ \ $\nu$
\[ \text{NRe}:=\frac{\vv\cdot d}{\nu}
";\;;;"
\text{NRe}
\]
Z formuły Blasusa obliczmy współczynnik strat linowych
\[
\lambda_l:=\frac{0.3164}{\sqrt{4\{\text{NRe}\}}}

```

";\;\;\;"

\lambda_1

\]

Szukaną wysokość H wyznaczmy z uogólnionego równania Bernuliego dla przekrojów 1 i 2 (rys. \ref{zbiornik}):

\begin{equation}

\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_b}{\gamma} + h + H

=

\frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_b}{\gamma} + \sum h_s

\label{rb}

\end{equation}

ponieważ $v_1 = 0$ $v_2 = v$ oraz

\["

\sum h_s = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\xi_w + 3 \cdot \xi_k + \xi_z + \lambda_1 \cdot \frac{1}{g} \right)

\]

zatem

\["

 $H = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1 + \xi_w + 3 \cdot \xi_k + \xi_z + \lambda_1 \cdot \frac{1}{g} \right)$

";\;\;\;"

 $H \cdot \text{om}$

\]

v g ξ_w ξ_k ξ_z λ_1 l_p d h
{\bf Odp.:}

Aby objętościowy strumień wypływu cieczy ze zbiornika (patrz rys. \ref{zbiornik}) wynosił

 $V \cdot \text{oliter} / \text{os}$

to wysokość %poziomu cieczy w~zbiorniku

 H powinna przyjąć wartość $H \cdot \text{om} . "$

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.7 Roczny koszt gotowania wody na herbatę

Ile wynosi roczny koszt gotowania wody na herbatę i kawę dla całej rodziny? Załóżmy, że:

$n := 4.0$ – dzienna ilość szklanek herbaty i kawy na jedną osobę w rodzinie

$l_o := 4$ – ilość osób w rodzinie

$V := 250 \cdot \text{ml}$ – objętość szklanki

$c_p := 4.19 \cdot \text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ – ciepło właściwe wody,

$c_e := 0.24 \cdot \text{PLN}/\text{kWh}$ – cena kWh energii elektrycznej

$\rho := 998 \cdot \text{kg}/\text{m}^3$ – gęstość wody

$T_p := 20 \cdot ^\circ\text{C}$ – temperatura początkowa wody

$T_w := 100.0 \cdot ^\circ\text{C}$ – temperatura wrzenia wody

$\eta_e := 80.0 \cdot \%$ – sprawność czajnika elektrycznego

$\tau := 365.25$ – średnia ilość dni roku

Obliczenia

Roczna masa wody zużywana do gotowania wody na herbatę i kawę przez całą rodzinę

$$m_w := (\rho \cdot V) \cdot n \cdot l_o \cdot \tau; \quad m_w \cdot \text{kg}^{-1} = 1458.078$$

ilość energii cieplnej potrzebna do zagotowania $m_w \cdot \text{kg}^{-1} = 1458.078$ masy wody

$$\Delta Q := m_w \cdot c_p \cdot (T_w - T_p); \quad \Delta Q \cdot \text{MJ}^{-1} = 488.7477456; \quad \Delta Q \cdot \text{kWh}^{-1} = 135.763262667$$

Obliczenia dla gotowania wody przy wykorzystaniu energii elektrycznej

Rzeczywiste zapotrzebowanie na energię elektryczną

$$\Delta Q_e := \frac{\Delta Q}{\eta_e}; \quad \Delta Q_e \cdot \text{MJ}^{-1} = 610.934682; \quad \Delta Q_e \cdot \text{kWh}^{-1} = 169.704078333 \quad (20)$$

koszt ogrzania wody przy użyciu czajnika elektrycznego

$$k_e := c_e \cdot \Delta Q_e; \quad k_e \cdot \text{PLN}^{-1} = 40.7289788 \quad (21)$$

Obliczenia przy wykorzystaniu węgla do gotowania wody

Przy założeniu, że do gotowania wody będzie używany węgiel.

Dla wartości opałowej węgla $W_w := 16.7 \cdot \text{MJ/kg}$ i przy sprawności pieca $\eta_w := 45 \cdot \%$ należy uzyskać ilość energii cieplnej

$$\Delta Q_w := \frac{\Delta Q}{\eta_w}; \quad \Delta Q_w \cdot \text{MJ}^{-1} = 1086.10610133; \quad \Delta Q_w \cdot \text{kWh}^{-1} = 301.696139259 \quad (22)$$

oznacza to, że potrzeba spalić

$$m_w := \frac{\Delta Q_w}{W_w}; \quad m_w \cdot \text{kg}^{-1} = 65.036293493$$

więc przy cenie węgla $c_w := 0.5 \cdot \text{PLN/kg}$ koszt ogrzania wody przy użyciu pieca opalanego węglem wynosi

$$k_w := c_w \cdot m_w; \quad k_w \cdot \text{PLN}^{-1} = 32.5181467465 \quad (23)$$

Odp.: Roczny koszt gotowania wody na herbatę i kawę dla całej rodziny wynosi $k_e \cdot \text{PLN}^{-1} = 40.7289788$ przy użyciu prądu elektrycznego oraz $k_w \cdot \text{PLN}^{-1} = 32.5181467465$ przy wykorzystaniu węgla. Uwaga w obliczeniach domyślnie założono, że za każdym razem będzie gotowana tylko taka ilość wody jaka jest potrzebna oraz w przypadku wykorzystania węgla piec już jest rozpalony.

```
{\scriptsize
% Copyright CalcTeX@onet.eu
Obliczenia wykonane za pomocą pakietu
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\
Jestem otwarty na wszelkie uwagi:
\EmailToCalcTeX}
```

```
\Zadanie{Roczny koszt gotowania wody na herbatę}
%-----
Ile wynosi roczny koszt gotowania wody na herbatę i~kawę
dla całej rodziny?
Założmy, że: \\
$n:=4.0$ -- dzienna ilość szklanek herbaty i~kawy na jedną
osobę w rodzinie\\
$l_o:=4$ --ilość osób w rodzinie \\
$V:=250\cdot \text{ml}$ -- objętość szklanki \\
$c_p:=4.19\cdot \text{kJ}/(\text{kg}\cdot \text{oC})$ -- ciepło właściwe wody,\\
$c_e:=0.24\cdot \text{PLN}/\text{kWh}$ -- cena kWh energii elektrycznej\\
$\rho:=998\cdot \text{kg}/\text{m}^3$ -- gęstość wody\\
$T_p:=20\cdot \text{oC}$ -- temperatura początkowa wody\\
$T_w:=100.0\cdot \text{oC}$ -- temperatura wrzenia wody\\
$\eta_e:=80.0\cdot \text{percent}$ -- sprawność czajnika elektrycznego\\
$\tau:=365.25$ -- średnia ilość dni roku\\
%$\text{Year}\cdot \text{oDay}$
```

\Obliczenia{}

Roczna masa wody zużywana do gotowania wody na herbatę i~kawę przez całą rodzinę

```
\[
m_w:=\left( \rho \cdot V \right) \cdot n \cdot l_o \cdot \tau
";\;\;\;\;"
m_w\cdot \text{okg}
\]
```

ilość energii cieplnej potrzebna do zagotowania $m_w \cdot \text{okg}$ masy wody

```
\[
\Delta Q:=m_w \cdot c_p \cdot \left( T_w - T_p \right)
"{;\;\;\;\;"
\Delta Q \cdot \text{oMJ}
"};\;\;\;\;"
\Delta Q \cdot \text{okWh}
\]
```

{\bf Obliczenia dla gotowania wody przy wykorzystaniu energii elektrycznej}\}

Rzeczywiste zapotrzebowanie na energię elektryczną

```
\begin{equation}
\Delta Q_{e}:=\frac{\Delta Q}{\eta_e}
"{;\;\;\;\;"
\Delta Q_e \cdot \text{oMJ}
"};\;\;\;\;"
\Delta Q_e \cdot \text{okWh}
\end{equation}
```

koszt ogrzania wody przy użyciu czajnika elektrycznego

1.8 Wyływ okołodźwiękowy ze zbiornika

Oblicz prędkość wyływu powietrza ze zbiornika, jeśli ciśnienie powietrza w zbiorniku wynosi $p_o := 1.8 \cdot \text{atm}$ a temperatura $T_o := (15 + 273.15) \cdot \text{K}$, zaś ciśnienie otoczenia – na zewnątrz zbiornika wynosi $p_a := 760.0 \cdot \text{mmHg}$ oraz oblicz maksymalną możliwą prędkość wyływu jak i lokalną Liczbę Macha dla prędkości wyływu.

Obliczenia

Dla powietrza mamy:

$\kappa := 1.4$ – wykładnik adiabaty dla powietrza

$R_{air} := 287.05 \cdot \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ – indywidualna stała gazowa dla powietrza

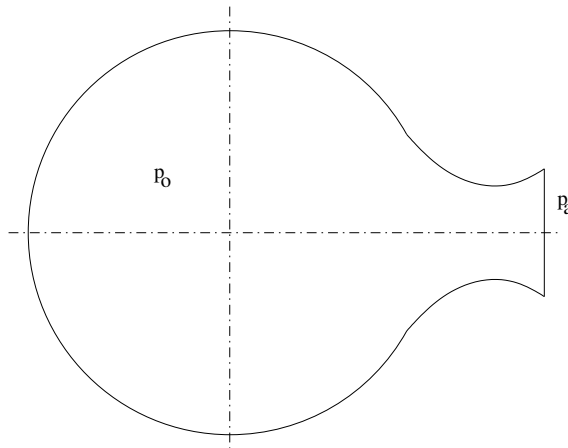
Dane:

$T_o \cdot \text{K}^{-1} = 288.15$ – temperatura w zbiorniku,

$p_o \cdot \text{hPa}^{-1} = 1823.85$ – ciśnienie w zbiorniku,

$p_a \cdot \text{hPa}^{-1} = 1013.25$ – temperatura na zewnątrz zbiornika.

Obliczenie współczynnika β określającego charakter przepływu



Rysunek 3: Schemat zbiornika z zaznaczonym ciśnieniem w zbiorniku p_o i ciśnieniem na zewnątrz zbiornika p_a .

$$\beta_{kr} = \frac{p_a}{p_o} = \left(\frac{2.0}{\kappa + 1} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} ; \quad \beta_{kr} := \left(\frac{2.0}{\kappa + 1} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} ; \quad \beta_{kr} = 0.528281787717$$

w naszym przypadku

$$\beta := \frac{p_a}{p_o} ; \quad \beta = 0.55555555555557$$

Równanie Bernulliego dla gazu nieściśliwego o postaci (24):

$$\frac{1}{2} \rho_o v_o^2 + p_o = \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + p_1 \quad (24)$$

ulegnie przekształceniu przez wprowadzenie wyrażenia na gęstość dla przemiany np. adiabaticznej

$$\frac{p_o}{p_1} = \left(\frac{\rho_o}{\rho_1} \right)^\kappa \quad (25)$$

gdzie $\kappa = c_p/c_v$ wówczas otrzymamy równanie Bernulliego w postaci:

$$\frac{v_o^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_o}{\rho_o} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \quad (26)$$

Prędkość wyływu powietrza ze zbiornika można wyliczyć z zależności Saint-Vennanta i Wantzela w formie (27) którą wyznaczamy na podstawie zależności (26) przy założeniu $v_o = 0$

$$v_{exit} := \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_o}{\rho_o} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_o}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}\right)} \quad (27)$$

Lub stosując równanie stanu gazu doskonałego

$$pV = mRT; \quad m = \rho V; \quad pV = \rho VRT \quad \Leftrightarrow \frac{p_o}{\rho_o} = RT \quad (28)$$

Podstawiając (28) do (27) otrzymamy (29):

$$v_{exit} := \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R_{air} \cdot T_o \cdot \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_o}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}\right)}; \quad v_{exit} \cdot \text{m}^{-1}/\text{s}^{-1} = 299.181213572 \quad (29)$$

Maksymalna możliwa prędkość wyływu powietrza ze zbiornika uzyskamy gdy $p_a/p_o = 0$ wówczas otrzymamy:

$$v_{kr} := \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R_{air} \cdot T_o}; \quad v_{kr} \cdot \text{m}^{-1}/\text{s}^{-1} = 760.91668565$$

$$v_{max} := v_{kr} \dots\dots\dots v_{max} \cdot \text{km}^{-1}/\text{hr}^{-1} = 2739.30006834$$

Lokalna prędkość dźwięku (dla przemiany adiabatycznej):

$$a_l := \sqrt{\kappa \cdot R_{air} \cdot T_o}; \quad a_l \cdot \text{m}^{-1}/\text{s}^{-1} = 340.292286865$$

Lokalna Liczba Macha

$$M := \frac{v_{exit}}{a_l}; \quad M = 0.879188935864$$

Odp.: Prędkość wyływu powietrza ze zbiornika wynosi $v_{exit} \cdot \text{m}^{-1}/\text{s}^{-1} = 299.181213572$, jeśli w zbiorniku panują warunki $T_o \cdot \text{K}^{-1} = 288.15$, $p_o \cdot \text{hPa}^{-1} = 1823.85$ na zewnątrz ciśnienie zaś wynosi $p_a \cdot \text{kPa}^{-1} = 101.325$, maksymalna prędkość wyływu powietrza ze zbiornika wynosi $v_{max} \cdot \text{m}^{-1}/\text{s}^{-1} = 760.91668565$, lokalna Liczba Macha wynosi $M = 0.879188935864$.

```
{\scriptsize
% Copyright CalcTeX@onet.eu
Obliczenia wykonane za pomocą pakietu
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\\
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\}
Jestem otwarty na wszelkie uwagi:
\EmailToCalcTeX}
```

\Zadanie{Wyływ okołodźwiękowy ze zbiornika}

Oblicz prędkość wypływu powietrza ze zbiornika,
jeśli ciśnienie powietrza w zbiorniku wynosi

$p_o = 1.8 \cdot p_{atm}$ a temperatura

$T_o = (15 + 273.15) \cdot K$,

zaś ciśnienie otoczenia -- na zewnątrz zbiornika wynosi $p_a = 1.0 \cdot p_{atm}$.

$p_a = 760.0 \cdot mmHg$

oraz oblicz maksymalną możliwą prędkość wypływu
jak i lokalną Liczbę Macha dla prędkości wypływu.

\Obliczenia{}

Dla powietrza mamy:\\

$\kappa = 1.4$ -- wykładnik adiabaty dla powietrza\\

$R_u = 8.314472 \cdot J / (mol \cdot K)$ -- uniwersalna stała gazowa\$

$R_{air} = 287.05 \cdot J / (kg \cdot K)$ -- indywidualna stała gazowa dla powietrza\\

Dane:\\

$T_o \cdot K$ -- temperatura w zbiorniku,\\

$p_o \cdot Pa$ -- ciśnienie w zbiorniku,\\

$p_a \cdot Pa$ -- temperatura na zewnątrz zbiornika.

\\ "[2ex]"

\begin{figure} "[!hb]"

\begin{center}

\includegraphics[scale=0.65]{figs/tank}

\caption{Schemat zbiornika z zaznaczonym ciśnieniem w zbiorniku p_o i ciśnieniem na z

\label{tank}

\end{center}

\end{figure}

Obliczenie współczynnika β określającego charakter przepływu

\[

$\beta_{kr} = \frac{p_a}{p_o} = \left(\frac{2.0}{\kappa + 1} \right)^{\kappa / (\kappa - 1)}$;

$\beta_{kr} = \left(\frac{2.0}{\kappa + 1} \right)^{\kappa / (\kappa - 1)}$

;" ; ;"

\beta_{kr}

\]

w naszym przypadku

\[

$\beta = \frac{p_a}{p_o}$

;" ; ; ;"

\beta

\]

Równanie Bernulliego dla gazu nieściśliwego o postaci (\ref{rb}):

```

\begin{equation}
\frac{1}{2}\rho_o v_o^2 + p_o
=
\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + p_1
\label{rb}
\end{equation}

```

ulegnie przekształceniu przez wprowadzenie wyrażenia na gęstość dla przemiany np. adiabatycznej

```

\begin{equation}
\frac{p_o}{p_1}=\left( \frac{\rho_o}{\rho_1}\right)^{\kappa}
\label{adiabata}
\end{equation}

```

gdzie $\kappa=c_p/c_v$

wówczas otrzymamy równanie Bernulliego w postaci:

```

\begin{equation}
\frac{v_o^2}{2}+\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_o}{\rho_o}
=
\frac{v_1^2}{2}+\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1}{\rho_1}
\label{rbk}
\end{equation}

```

Prędkość wypływu powietrza ze zbiornika można wyliczyć z zależności Saint-Vennanta i Want, którą wyznaczamy na podstawie zależności (\ref{rbk}) przy założeniu $v_o=0$

```

\begin{equation}
v_{\text{exit}}:=\sqrt{2\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_o}{\rho_o}\cdot\left(1-\frac{p_1}{p_o}\right)}
\label{sww}
\end{equation}

```

Lub stosując równanie stanu gazu doskonałego

```

\begin{equation}
pV=mRT;\quad m=\rho V;\quad pV=\rho VRT\quad\Leftrightarrow
\frac{p_o}{\rho_o}=RT
\label{rsg}
\end{equation}

```

Podstawiając (\ref{rsg}) do (\ref{sww}) otrzymamy (\ref{vexit}):

```

\begin{equation}
v_{\text{exit}}:=\sqrt{2\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot R_{\text{air}}\cdot T_o\cdot\left(1-\frac{p_1}{p_o}\right)}
\label{vexit}
\end{equation}

```

Maksymalna możliwa prędkość wypływu powietrza ze zbiornika uzyskamy gdy $p_1/p_o=0$ wówczas otrzymamy:

```

\left[
\begin{aligned}
v_{\text{kr}}&:=\sqrt{2\cdot\frac{\kappa}{\kappa+1}\cdot R_{\text{air}}\cdot T_o} \\
v_{\text{kr}}&:=\sqrt{2\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot R_{\text{air}}\cdot T_o} \\
\end{aligned}
\right]

```

```
 $v_{\max} := v_{kr} \cdot \frac{v_{\max}}{v_{kr}}$ 
```

```
\\
```

Lokalna prędkość dźwięku (dla przemiany adiabatycznej):

```
\[
```

```
 $a_1 := \sqrt{\kappa \cdot R_{air} \cdot T_o}$ 
```

```
";\;\;\;"
```

```
 $a_1 \cdot \frac{v_{\max}}{v_{kr}}$ 
```

```
\]
```

Lokalna Liczba Macha

```
 $M = \frac{v_{exit}}{a_1}$ 
```

```
";\;\;\;"
```

```
M\]
```

Odp.: Prędkość wypływu powietrza ze zbiornika wynosi

```
 $v_{exit} \cdot \frac{v_{\max}}{v_{kr}}$ , "$
```

jeśli w zbiorniku panują warunki

```
 $T_o \cdot K$ , "$
```

```
 $p_o \cdot Pa$ 
```

na zewnątrz ciśnienie zaś wynosi $p_a \cdot Pa$, "\$

maksymalna prędkość wypływu powietrza ze zbiornika wynosi

```
 $v_{\max} \cdot \frac{v_{\max}}{v_{kr}}$ , "$
```

lokalna Liczba Macha wynosi

```
 $M$ . "$
```

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.9 Równanie Van der Waalsa

W niskich temperaturach i przy wysokich ciśnieniach gazy rzeczywiste wykazują odstępstwa od praw gazów doskonałych. Dla wytłumaczenia tych odstępstw van der Waals wprowadził do równania stanu gazu poprawki uwzględniające wzajemne oddziaływanie i objętość własną cząsteczek. Równanie stanu dla 1 mola gazu rzeczywistego w ujęciu van der Waalsa ma postać:

$$(p + a/V^2)(V - b) = RT \quad (30)$$

gdzie: V – objętość molowa gazu rzeczywistego, p – ciśnienie, T – temperatura w kelwinach, a i b – stałe dla danego rodzaju gazu rzeczywistego.

Dla n moli gazu równanie (30) przyjmuje postać:

$$\left(p + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right) (V - nb) = nRT \quad (31)$$

Poprawka a uwzględnia istnienie sił międzycząsteczkowych, natomiast b jest poprawką związaną z objętością własną cząsteczek gazu. Tylko w przypadku rozrzedzonych gazów rzeczywistych obie poprawki, poprawka a na ciśnienie wewnętrzne i poprawka b na objętość własną cząsteczek, są bardzo małe i można je pominąć, otrzymując równanie stanu

gazu doskonałego.

Przykład

Na podstawie równania van der Waalsa obliczyć temperaturę, w której $n_g := 1.0 \cdot \text{mol}$ amoniaku zajmuje objętość $V := 0.5 \cdot \text{dm}^3$ pod ciśnieniem $p := 10 \cdot \text{MPa}$. Stałe a i b dla amoniaku wynoszą $a := 0.42 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{mol}$ i $b := 3.73 \cdot 10^{-5} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$.

Rozwiązanie

Przekształcając równanie van der Waalsa (30) dla 1 mola gazu, dla uniwersalnej stałej gazowej $R_u := 8.314472 \cdot \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ otrzymuje się:

$$T := (p + a/V^2) \cdot (V - b)/R_u$$

skąd po podstawieniu odpowiednich danych (z uwzględnieniem, że $p = 10000000.0 \text{N}/\text{m}^2$, $V = 0.0005 \text{m}^3$, $n_g = 1.0 \text{mol}$, $R_u = 8.314472 \text{N} \cdot \text{m}/(\text{K} \cdot \text{mol})$) otrzymuje się wynik $T \cdot \text{K}^{-1} = 649.991484727$.

```
{\scriptsize
% Copyright CalcTeX@onet.eu
Obliczenia wykonane za pomocą pakietu
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\\
\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\}
Jestem otwarty na wszelkie uwagi:
\EmailToCalcTeX}
```

\Zadanie{Równanie Van der Waalsa}

W niskich temperaturach i przy wysokich ciśnieniach gazy rzeczywiste wykazują odstępstwa od praw gazów doskonałych.

Dla wytłumaczenia tych odstępstw van der Waals wprowadził do równania stanu gazu poprawki uwzględniające wzajemne oddziaływanie i objętość własną cząsteczek. Równanie stanu dla 1 mola gazu rzeczywistego w ujęciu van der Waalsa ma postać:

```
\begin{equation}
"(p + a/V^2)(V-b) = RT
\label{vdw}
"\end{equation}
```

gdzie:

```
 "$V"$ -- objętość molowa gazu rzeczywistego,
 "$p"$ -- ciśnienie,
 "$T"$ -- temperatura w kelwinach,
 "$a"$ i "$b"$ -- stałe dla danego rodzaju gazu rzeczywistego.
 \}
```

Dla n moli gazu równanie (\ref{vdw}) przyjmuje postać:

```
\begin{equation}
\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V-nb) = nRT
```

```
\label{vdwn}
"\end{equation}
Poprawka "$a"$ uwzględnia istnienie sił międzycząsteczkowych,
natomiast "$b"$ jest poprawką związaną z objętością własną cząsteczek gazu.
Tylko w przypadku rozrzedzonych gazów rzeczywistych obie poprawki,
poprawka "$a"$ na ciśnienie wewnętrzne i poprawka "$b"$ na objętość własną cząsteczek,
są bardzo małe i można je pominąć, otrzymując równanie stanu gazu doskonałego.
```

```
{\large\}"[2ex]"\noindent \bf Przykład\}"[2ex]"}
```

```
Na podstawie równania van der Waalsa obliczyć temperaturę, w której $n_g=1.0\cdot
$V:=0.5 \cdot \text{dm}^3$ pod ciśnieniem $p:=10\cdot \text{MPa}$. Stałe "$a"$ i "$b"$ dla amon
$a:=0.42 \cdot \text{N}\cdot \text{m}^4\cdot \text{mol}$ i $b:=3.73\cdot 10^{-5}\cdot \text{m}^3/\text{mol}".$
\
{\Large \}"[2ex]"\noindent\bf Rozwiązanie\}"[2ex]"}
```

```
Przekształcając równanie van der Waalsa (\ref{vdw}) dla 1 mola gazu,
dla uniwersalnej stałej gazowej $R_u:=8.314472 \cdot \text{J}/\left( \text{mol}\cdot \text{K}\right)$ otr
\[
T := (p + a/V^2)\cdot (V - b) / R_u
% ";\\;\\;"
% T\cdot \text{oK}
\]
```

```
skąd po podstawieniu odpowiednich danych ( z uwzględnieniem, że
$p"\un{N/m^2},"$
$V"\un{m^3},"$
$n_g"\text{rm}\tilde{\text{mol}},"$
$R_u"\un{N\cdot m/(K\cdot mol)}"$
) otrzymuje się wynik
$T\cdot \text{oK}".$
```

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.10 Węgiel kamienny

Węgiel kamienny o następującym składzie masowym substancji bezpopiołowej i bezwodnej (Dry Ash Free):

$r_C^{dry} := 79 \cdot \%$, $r_H^{dry} := 5 \cdot \%$, $r_{S_p}^{dry} := 1.1 \cdot \%$, $r_O^{dry} := 14 \cdot \%$, $r_N^{dry} := 0.9 \cdot \%$,

zawiera wilgoci $r_w := 6 \cdot \%$ i popiołu $r_{ash} := 10 \cdot \%$. Oblicz skład masowy węgla w stanie roboczym a następnie zapotrzebowanie powietrza do spalania oraz ilość i skład spalin wilgotnych i suchych, jeżeli liczba nadmiary powietrza $\lambda_p := 1.4$.

Obliczenia

$v_n := 22.71 \cdot \text{um}^3/\text{kmol}$ – objętość 1 kmola gazu w warunkach normalnych

Skład powietrza

$r_{O_2 \in air} := 21 \cdot \%$ – udział tlenu w powietrzu

$r_{O_2 \in air} = 0.21$

$r_{N_2 \in air} := 100 \cdot \% - r_{O_2 \in air}$ – udział azotu w powietrzu

$$r_{N_2 \in air} = 0.79$$

Masy molowe składników:

$$M_C := 12.011 \cdot \text{gm/mol}$$

$$M_O := 15.9994 \cdot \text{gm/mol}$$

$$M_N := 14.000674 \cdot \text{gm/mol}$$

$$M_S := 32.066 \cdot \text{gm/mol}$$

$$M_H := 1.00794 \cdot \text{gm/mol}$$

$$M_H \cdot \text{kg}^{-1}/\text{kmol}^{-1} = 1.00794$$

$$M_{H_2} := 2 \cdot M_H \dots\dots\dots M_{H_2} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 2.01588$$

$$M_{CO} := M_C + M_O \dots\dots\dots M_{CO} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 28.0104$$

$$M_{CO_2} := M_C + 2 \cdot M_O \dots\dots\dots M_{CO_2} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 44.0098$$

$$M_{O_2} := 2 \cdot M_O \dots\dots\dots M_{O_2} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 31.9988$$

$$M_{N_2} := 2 \cdot M_N \dots\dots\dots M_{N_2} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 28.001348$$

$$M_{H_2} := 2 \cdot M_H \dots\dots\dots M_{H_2} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 2.01588$$

$$M_{H_2O} := 2 \cdot M_H + M_O \dots\dots\dots M_{H_2O} \cdot \text{gm}^{-1}/\text{mol}^{-1} = 18.01528$$

Spawdzenie udziałów:

$$r_C^{dry} + r_H^{dry} + r_{S_p}^{dry} + r_O^{dry} + r_N^{dry} = 1.0$$

Udział wilgoci i popiołu wyniosi:

$$(r_w + r_{ash}) = 0.16$$

to substancja bezpopiołowa i bezwodna $r^{daf} := 1 - (r_w + r_{ash})$ stanowi $r^{daf} = 0.84$ całej masy węgla więc skład elementarny uzyskuje się, mnożąc podane wyżej udziały przez r^{daf} :

$$r_C := r_C^{dry} \cdot r^{daf} \quad r_C \cdot \%^{-1} = 66.36$$

$$r_H := r_H^{dry} \cdot r^{daf} \quad r_H \cdot \%^{-1} = 4.2$$

$$r_{S_p} := r_{S_p}^{dry} \cdot r^{daf} \quad r_{S_p} \cdot \%^{-1} = 0.924$$

$$r_O := r_O^{dry} \cdot r^{daf} \quad r_O \cdot \%^{-1} = 11.76$$

$$r_N := r_N^{dry} \cdot r^{daf} \quad r_N \cdot \%^{-1} = 0.756$$

Spawdzenie:

$$r_C + r_H + r_{S_p} + r_O + r_N + r_w + r_{ash} = 1.0$$

Minimalna ilość powietrza do spalania

$$V_{air_{min}} := \frac{v_n}{r_{O_2 \in air}} \cdot \left(\frac{r_C}{M_C} + \frac{r_H}{2 \cdot M_{H_2}} - \left(\frac{r_O}{M_{O_2}} - \frac{r_{S_p}}{M_S} \right) \right); \quad V_{air_{min}} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 6.73510030536$$

rzeczywista ilość powietrza doprowadzona do spalania:

$$V_{air} := \lambda_p \cdot V_{air_{min}}; \quad V_{air} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 9.4291404275$$

Objętości poszczególnych składników spalin:

$$V_{CO_2} := v_n \cdot \frac{r_C}{M_C}; \quad V_{CO_2} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 1.25471284656$$

$$V_{H_2O} := v_n \cdot \left(\frac{r_H}{M_{H_2}} + \frac{r_w}{M_{H_2O}} \right); \quad V_{H_2O} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 0.548788957494$$

$$V_{SO_2} := v_n \cdot \frac{r_{S_p}}{M_S}; \quad V_{SO_2} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 0.0065440154681$$

$$V_{N_2} := v_n \cdot \frac{r_N}{M_{N_2}} + r_{N_2 \in air} \cdot V_{air}; \quad V_{N_2} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 7.45515234254$$

$$V_{O_2} := r_{O_2 \in air} \cdot (\lambda_p - 1) \cdot V_{air_{min}}; \quad V_{O_2} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 0.56574842565$$

Ilość powstających spalin:

$$V_{fumes} := V_{CO_2} + V_{H_2O} + V_{SO_2} + V_{N_2} + V_{O_2}; \quad V_{fumes} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 9.83094658771$$

Ilość spalin suchych

$$V_{fumes}^{dry} := V_{fumes} - V_{H_2O}; \quad V_{fumes}^{dry} \cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1} = 9.28215763022$$

Skład spalin wilgotnych (wet)

$$\begin{aligned} r_{CO_2}^{wet} &:= V_{CO_2}/V_{fumes} & r_{CO_2}^{wet} \cdot \%^{-1} &= 12.7628894671 \\ r_{H_2O}^{wet} &:= V_{H_2O}/V_{fumes} & r_{H_2O}^{wet} \cdot \%^{-1} &= 5.58225957793 \\ r_{SO_2}^{wet} &:= V_{SO_2}/V_{fumes} & r_{SO_2}^{wet} \cdot \%^{-1} &= 0.066565466608 \\ r_{N_2}^{wet} &:= V_{N_2}/V_{fumes} & r_{N_2}^{wet} \cdot \%^{-1} &= 75.8335148709 \\ r_{O_2}^{wet} &:= V_{O_2}/V_{fumes} & r_{O_2}^{wet} \cdot \%^{-1} &= 5.75477061748 \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$r_{CO_2}^{wet} + r_{H_2O}^{wet} + r_{SO_2}^{wet} + r_{N_2}^{wet} + r_{O_2}^{wet} = 1.0$$

Skład spalin suchych (dry)

$$\begin{aligned} r_{CO_2}^{dry} &:= V_{CO_2}/V_{fumes}^{dry} & r_{CO_2}^{dry} \cdot \%^{-1} &= 13.5174697149 \\ r_{SO_2}^{dry} &:= V_{SO_2}/V_{fumes}^{dry} & r_{SO_2}^{dry} \cdot \%^{-1} &= 0.0705010163455 \\ r_{N_2}^{dry} &:= V_{N_2}/V_{fumes}^{dry} & r_{N_2}^{dry} \cdot \%^{-1} &= 80.3170193778 \\ r_{O_2}^{dry} &:= V_{O_2}/V_{fumes}^{dry} & r_{O_2}^{dry} \cdot \%^{-1} &= 6.09500989089 \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$r_{CO_2}^{dry} + r_{SO_2}^{dry} + r_{N_2}^{dry} + r_{O_2}^{dry} = 1.0$$

`\scriptsize`

`% Copyright CalcTeX@onet.eu`

`Obliczenia wykonane za pomoca pakietu`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\\`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\`

`Jestem otwarty na wszelkie uwagi:`

`\EmailToCalcTeX}`

`%\newcommand{\propan}{\rm C_3H_8}`

`%\newcommand{\butan}{\rm C_4H_{10}}`

`%\newcommand{\woda}{\rm H_2O}`

`%\newcommand{\codwa}{\rm CO_2}`

`%\newcommand{\rwet}{r^{wet}}`

`%\newcommand{\rdry}{r^{dry}}`

`%\newcommand{\rwil}{r^{wil}}`

`%\newcommand{\rsuch}{r^{such}}`

`%\newcommand{\rdaf}{r^{daf}}`

`%\newcommand{\Vdaf}{V^{daf}}`

`%\newcommand{\Vdry}{V^{dry}}`

\Zadanie{Węgiel kammienny}

Węgiel kamienny o następującym składzie masowym substancji bezpopiołowej i bezwodnej (Dry Ash Free):\\

$\$r_{dry_C} := 79 \cdot \text{percent}, "\$$

$\$r_{dry_H} := 5 \cdot \text{percent}, "\$$

$\$r_{dry_S_p} := 1.1 \cdot \text{percent}, "\$$

$\$r_{dry_O} := 14 \cdot \text{percent}, "\$$

$\$r_{dry_N} := 0.9 \cdot \text{percent}, "\$\\$

zawiera wilgoci $\$r_w := 6 \cdot \text{percent}$ i popiołu $\$r_{ash} := 10 \cdot \text{percent}."$

Oblicz skład masowy węgla w stanie roboczym a następnie zapotrzebowanie powietrza

do spalania oraz ilość i skład spalin wilgotnych i suchych, jeżeli liczba nadmiary powietrza

$\lambda_p := 1.4."$

\Obliczenia{}

$v_n := 22.71 \cdot \text{um}^3 / \text{kmol}$ -- objętość 1 kmola gazu w warunkach normalnych\\

Skład powietrza\\

$\$r_{O_2 \text{ in air}} := 21 \cdot \text{percent}$ -- udział tlenu w powietrzu \hfill $\$r_{O_2 \text{ in air}} \$$ \\

$\$r_{N_2 \text{ in air}} := 100 \cdot \text{percent} - r_{O_2 \text{ in air}} \$$ -- udział azotu w powietrzu \hfill $\$r_{N_2 \text{ in air}} \$$

Masy molowe składników:\\

$\$M_{C} := 12.011 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \\

$\$M_{O} := 15.9994 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \\

$\$M_{N} := 14.000674 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \\

$\$M_{S} := 32.066 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \\

$\$M_{H} := 1.00794 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \hfill $\$M_{H} \cdot \text{okg} / \text{okmol} \$$ \\

%---

$\%M_{C} := 12 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \\ $\$M_{O} := 16 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$ \\ $\$M_{N} := 14.000 \cdot \text{gm} / \text{mol} \$$

%---

$\$M_{H_2} := 2 \cdot M_{H} \$$ \dotfill $\$M_{H_2} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\$M_{CO} := M_{C} + M_{O} \$$ \dotfill $\$M_{CO} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\$M_{CO_2} := M_{C} + 2 \cdot M_{O} \$$ \dotfill $\$M_{CO_2} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\$M_{O_2} := 2 \cdot M_{O} \$$ \dotfill $\$M_{O_2} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\$M_{N_2} := 2 \cdot M_{N} \$$ \dotfill $\$M_{N_2} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\$M_{H_2} := 2 \cdot M_{H} \$$ \dotfill $\$M_{H_2} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\$M_{H_2O} := 2 \cdot M_{H} + M_{O} \$$ \dotfill $\$M_{H_2O} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ \\

$\%M_{CH_4} := M_{C} + 4 \cdot M_{H} \$$ \dotfill $\$M_{CH_4} \cdot \text{ogm} / \text{omol} \$$ %\\

Spawdzenie udziałów:

$\left[r_{dry_C} + r_{dry_H} + r_{dry_S_p} + r_{dry_O} + r_{dry_N} \right]$

Udział wilgoci i popiołu wyniosi:

$\left[\left(r_w + r_{ash} \right) \right]$

to substancja bezpopiołowa i bezwodna $\rdaf := 1 - \left(r_w + r_{ash} \right)$

stanowi \rdaf całej masy węgla więc skład elementarny uzyskuje się,

mnożąc podane wyżej udziały przez " \rdaf :"

\\

$\$r_C := r_{dry_C} \cdot \rdaf$ \hfill $\$r_C \cdot \text{opercent} \$$ \\

$\$r_H := r_{dry_H} \cdot \rdaf$ \hfill $\$r_H \cdot \text{opercent} \$$ \\

$\$r_{S_p} := r_{dry_S_p} \cdot \rdaf$ \hfill $\$r_{S_p} \cdot \text{opercent} \$$ \\

$\$r_O := r_{dry_O} \cdot \rdaf$ \hfill $\$r_O \cdot \text{opercent} \$$ \\

```

$ r_N :=\rdry_N \cdot \rdaf$ \hfill $r_N\cdot \opercent$\
Sprawdzenie:
\[ r_C +r_H +r_{S_p} +r_O +r_N +r_w+r_{ash}\]
Minimalna ilość powietrza do spalania
%$r_{O_2\{in\}air}:=.21$
\[
%V_{air_{min}}:=\frac{v_n}{0.21}\cdot \left(\frac{r_C}{M_C}+\frac{r_H}{2}\cdot M_{H_2}\right) -\
V_{air_{min}}:=\frac{v_n}{r_{O_2\{in\}air}}\cdot \left(\frac{r_C}{M_C}+\frac{r_H}{2}\cdot M_{H_2}\right)
";\;\;\;"
V_{air_{min}}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]
rzeczywista ilość powietrza doprowadzona do spalania:
\[V_{air}:=\lambda_p\cdot V_{air_{min}}\]
";\;\;\;"
V_{air}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]

%Ilość powstających spalin:
%\[
%V_{fumes}:=v_n\cdot \left(\frac{r_C}{12}+\left(\frac{r_H}{2}+\frac{r_w}{18}\right)+\frac{r_S}{M_S}\right)
%";\;\;\;"
%V_{fumes}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]
%Ilość wody
%\[
%%V_{H_2O}:=v_n\cdot \left(\frac{r_H}{2}+\frac{r_w}{18}\right)
%V_{H_2O}:=v_n\cdot \left(\frac{r_H}{M_{H_2}}+\frac{r_w}{M_{H_2O}}\right)
%";\;\;\;"
%V_{H_2O}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}
%\]
%
%\[
%V_{H_2O}:=v_n\cdot \left(\frac{r_H}{2}+\frac{r_w}{18}\right)
%";\;\;\;"
%V_{H_2O}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]
Objętości poszczególnych składników spalin:
\[
V_{CO_2}:=v_n\cdot \frac{r_C}{M_C}
";\;\;\;"
V_{CO_2}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}
\]
\[
%V_{H_2O}:=v_n\cdot \left(\frac{r_H}{2}+\frac{r_w}{18}\right)
V_{H_2O}:=v_n\cdot \left(\frac{r_H}{M_{H_2}}+\frac{r_w}{M_{H_2O}}\right)
";\;\;\;"
V_{H_2O}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}
\]
%\[
V_{SO_2}:=v_n\cdot \frac{r_{S_p}}{M_S}
";\;\;\;"
V_{SO_2}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}
\]

```

```

\[
%V_{N_2}:=v_n\cdot \frac{r_N}{M_{N_2}}+0.79\cdot V_{air}
V_{N_2}:=v_n\cdot \frac{r_N}{M_{N_2}}+r_{N_2\text{inair}}\cdot V_{air}
";\;\;\;"
V_{N_2}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]

\[
V_{0_2}:=r_{0_2\text{inair}}\cdot\left( \lambda_{p-1}\right)\cdot V_{air_{min}}
";\;\;\;"
V_{0_2}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]
Ilość powstających spalin:
\[
V_{fumes}:=V_{CO_2} +V_{H_2O}+ V_{SO_2} +V_{N_2}+V_{0_2}
%+0.79\cdot V_{air}+0.21\cdot(\lambda_{p-1})\cdot V_{air_{min}}
";\;\;\;"
V_{fumes}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}\]

Ilość spalin suchych
\[
\text{Vdry}_{fumes}:=V_{fumes}-V_{H_2O}
";\;\;\;"
\text{Vdry}_{fumes}\cdot (\text{um}^3/\text{kg})^{-1}
\]
Skład spalin wilgotnych (wet)\
%$\text{rwet}_{CO_2}:=\frac{V_{CO_2}}{V_{fumes}}\$\hfill $\text{rwet}_{CO_2}\$\
$\text{rwet}_{CO_2}:=V_{CO_2}/V_{fumes}\$\ \hfill $\text{rwet}_{CO_2}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rwet}_{H_2O}:=V_{H_2O}/V_{fumes}\$\ \hfill $\text{rwet}_{H_2O}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rwet}_{SO_2}:=V_{SO_2}/V_{fumes}\$\ \hfill $\text{rwet}_{SO_2}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rwet}_{N_2}:=V_{N_2}/V_{fumes}\$\ \hfill $\text{rwet}_{N_2}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rwet}_{0_2}:=V_{0_2}/V_{fumes}\$\ \hfill $\text{rwet}_{0_2}\cdot \text{opercent}\$
Sprawdzenie:
\[ \text{rwet}_{CO_2}+\text{rwet}_{H_2O}+\text{rwet}_{SO_2}+\text{rwet}_{N_2}+\text{rwet}_{0_2} \]
Skład spalin suchych (dry)\
$\text{rdry}_{CO_2}:=V_{CO_2}/\text{Vdry}_{fumes}\$\ \hfill $\text{rdry}_{CO_2}\cdot \text{opercent}\$
%$\text{rdry}_{H_2O}:=V_{H_2O}/\text{Vdry}_{fumes}\$\ \hfill $\text{rdry}_{H_2O}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rdry}_{SO_2}:=V_{SO_2}/\text{Vdry}_{fumes}\$\ \hfill $\text{rdry}_{SO_2}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rdry}_{N_2}:=V_{N_2} / \text{Vdry}_{fumes}\$\ \hfill $\text{rdry}_{N_2}\cdot \text{opercent}\$
$\text{rdry}_{0_2}:=V_{0_2} / \text{Vdry}_{fumes}\$\ \hfill $\text{rdry}_{0_2}\cdot \text{opercent}\$
Sprawdzenie:
\[ \text{rdry}_{CO_2}+\text{rdry}_{SO_2}+\text{rdry}_{N_2}+\text{rdry}_{0_2} \]

```

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

1.11 Podgrzewacz wody

Podgrzewacz wody o objętości $V := 80.0 \cdot \text{l}$ ma moc $P_p := 6.0 \cdot \text{kW}$. Jak duże będzie zapotrzebowanie na energię oraz jaki będzie czas podgrzania, gdy ogrzejemy wodę od

temperatury $t_1 := 15.5 \cdot ^\circ\text{C}$ do $t_2 := 85 \cdot ^\circ\text{C}$? Sprawność energetyczna podgrzewacza wynosi $\eta := 95 \cdot \%$.

Obliczenia

Dane:

$V \cdot \text{l}^{-1} = 80.0$ – objętość podgrzewacza wody,

$P_p \cdot \text{kW}^{-1} = 6.0$ – moc podgrzewacza,

$t_1 \cdot ^\circ\text{C} = 15.5$ – temperatura początkowa,

$t_2 \cdot ^\circ\text{C} = 85.0$ – temperatura końcowa,

Stałe dla wody

$c_w := 4.19 \cdot \text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ – ciepło właściwe dla wody,

$\rho := 998.5 \cdot \text{kg}/\text{m}^3$ – gęstość wody.

Przyrost temperatury:

$$\Delta t := t_2 - t_1; \quad \Delta t \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 69.5$$

Ilość ciepła potrzebna do podgrzania $V \cdot \text{l}^{-1} = 80.0$ wody o $\Delta t \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 69.5$ wynosi:

$$m_w := \rho \cdot V; \quad \Delta Q := m_w \cdot c_w \cdot \Delta t; \quad \Delta Q \cdot \text{MJ}^{-1} = 23.2614554$$

Rzeczywiste ciepło zużyte to procesu podgrzania w zależności od sprawności

$$\Delta Q_{zu} := \frac{\Delta Q}{\eta}; \quad \Delta Q_{zu} \cdot \text{MJ}^{-1} = 24.4857425263 \quad (32)$$

Praca potrzebna do podgrzania wody w podgrzewaczu równa jest zmianie energii zużytej do podgrzania wody

$$W_p := \Delta Q_{zu}; \quad W_p \cdot \text{kWh}^{-1} = 6.8015951462 \quad (33)$$

Oszacowanie czasu podgrzania wody

$$P = \frac{W}{\tau} \Leftrightarrow \tau := \frac{W_p}{P_p}; \quad \tau \cdot \text{min}^{-1} = 68.015951462 \quad (34)$$

Odp.: Do podgrzania $V \cdot \text{l}^{-1} = 80.0$ wody od $t_1 \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 15.5$ do $t_2 \cdot ^\circ\text{C}^{-1} = 85.0$ przy sprawności $\eta \cdot \%^{-1} = 95.0$ należy dostarczyć $\Delta Q_{zu} \cdot \text{MJ}^{-1} = 24.4857425263$ energii cieplnej poprzez wykonanie pracy $W_p \cdot \text{kWh}^{-1} = 6.8015951462$ jest to możliwe w czasie $\tau \cdot \text{min}^{-1} = 68.015951462$ przy mocy $P_p \cdot \text{kW}^{-1} = 6.0$.

`{\scriptsize`

`% Copyright CalcTeX@onet.eu`

`Obliczenia wykonane za pomocą pakietu`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\`

`Jestem otwarty na wszelkie uwagi:`

`\EmailToCalcTeX}`

`%\title{} %\author{} %\maketitle %\tableofcontents %\noindent`

`\Zadanie{Podgrzewacz wody}`

Podgrzewacz wody o objętości $V=80.0 \cdot \text{liter}$ ma moc $P_p=6.0 \cdot \text{kW}$.
 Jak duże będzie zapotrzebowanie na energię oraz jaki będzie czas podgrzania,
 gdy ogrzejemy wodę od temperatury $t_1=15.5 \cdot \text{°C}$
 do $t_2=85 \cdot \text{°C}$?
 Sprawność energetyczna podgrzewacza wynosi $\eta=95 \cdot \text{percent}$.

\Obliczenia{}

Dane:\\

$V \cdot \text{oliter}$ -- objętość podgrzewacza wody,\\

$P_p \cdot \text{okW}$ -- moc podgrzewacza,\\

$t_1 \cdot \text{°C}$ -- temperatura początkowa,\\

$t_2 \cdot \text{°C}$ -- temperatura końcowa,\\

Stałe dla wody\\

$c_w=4.19 \cdot \text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{°C})$ -- ciepło właściwe dla wody,\\

$\rho=998.5 \cdot \text{kg}/\text{m}^3$ -- gęstość wody.\\

Przyrost temperatury:

\[

$\Delta t:=t_2-t_1$

";\;\;\;"

$\Delta t \cdot \text{°C}$

\]

Ilość ciepła potrzebna do podgrzania $V \cdot \text{oliter}$ wody

o $\Delta t \cdot \text{°C}$ wynosi:

\[

$m_w:=\rho \cdot V$;\;\;\;"

$\Delta Q:=m_w \cdot c_w \cdot \Delta t$

";\;\;\;"

$\Delta Q \cdot \text{MJ}$

\]

Rzeczywiste ciepło zużyte to procesu podgrzania w zależności od sprawności

\begin{equation}

$\Delta Q_{zu}:=\frac{\Delta Q}{\eta}$

";\;\;\;"

$\Delta Q_{zu} \cdot \text{MJ}$

"\label{Qzu}"

\end{equation}

Praca potrzebna do podgrzania wody w podgrzewaczu równa jest

zmianie energii zużytej do podgrzania wody

\begin{equation}

$W_p:=\Delta Q_{zu}$

";\;\;\;"

$W_p \cdot \text{okWh}$

"\label{Wp}"

\end{equation}

Oszacowanie czasu podgrzania wody

\begin{equation}

$P=\frac{W}{\tau}$;\;\;\;\Leftrightarrow

\label{power}"

$$\tau = \frac{W_p}{P_p}$$

";\;\;"

$\tau \cdot \text{omin}$

$\end{equation}$

{\bf Odp.:} Do podgrzania $V \cdot \text{oliter}$ wody od $t_1 \cdot \text{ooC}$ do $t_2 \cdot \text{ooC}$ przy sprawności $\eta \cdot \text{opercent}$ należy dostarczyć $\Delta Q_{\text{zu}} \cdot \text{MJ}$ energii cieplnej poprzez wykonanie pracy $W_p \cdot \text{okWh}$ jest to możliwe w czasie $\tau \cdot \text{omin}$ przy mocy $P_p \cdot \text{okW}$."

$\begin{thebibliography}{99}$

$\bibitem{sg} \linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}$

$\end{thebibliography}$