

Spis treści

1	Przykłady rozwiązań w CalcTeX-u	1
1.1	Ziemia jako czarna dziura	1

1 Przykłady rozwiązań w CalcTeX-u

Poniższe obliczenia przeprowadzono przy użyciu pakietu CalcTeX.
<http://sg.bzip.pl/CalcTeX/>

1.1 Ziemia jako czarna dziura

Jeżeli udałoby się ścisnąć kulę ziemską do dowolnych rozmiarów, to przy jakim promieniu stałaby się czarną dziurą oraz ile, zgodnie z teorią newtonowską, wynosiłaby siła przyciągania ziemskiego dla masu $m_p := 4.64 \cdot \mu\text{gm}$ na powierzchni tak powstałej czarnej dziury?

Obliczenia

Wiemy, że czarna dziura to obiekt dla którego prędkość ucieczki jest conajmniej równa prędkości światła.

Dane:

$c := 299792458.0 \cdot \text{m/s}$ – prędkość światła

$G := 6.673231 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ – stała grawitacji

$M := 5.9736 \cdot 10^{24} \cdot \text{kg}$ – masa Ziemi

$r := 6373.14 \cdot \text{km}$ – promień Ziemi

Sprawdzenie stałych fizycznych poprzez obliczenie przyspieszenia ziemskiego

$$g_z := G \cdot \frac{M}{r^2}; \quad g_z \cdot (\text{m/sec}^2)^{-1} = 9.81443672259 \quad (1)$$

Jak widać z równania (1) wartość przyspieszenia ziemskiego jest akceptowalna więc można przypuszczać, że stałe są poprawne.

Prędkość ucieczki dla ciała o masie M i promieniu r obliczamy z poniższej zależności (2):

$$v := \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} \quad (2)$$

Czyli dla Ziemi prędkość ucieczki wynosi: $v \cdot (\text{km/s})^{-1} = 11.1847019857$.

Ziemia stanie się czarną dziurą, gdy prędkość ucieczki będzie conajmniej równa prędkości światła, czyli:

$$c := \sqrt{2 \cdot G \cdot M/r} \Leftrightarrow \quad (3)$$

$$r_c := (2 \cdot G \cdot M) / c^2 \quad (4)$$

podstawiając, promień ściśniętej Ziemi – czarnej dziury, wówczas wyniesie: $r_c \cdot \text{mm}^{-1} = 8.87076116938$.

Przyspieszenie ziemskie na powierzchni tak powstałej czarnej dziury wynosi:

$$g_c := G \cdot \frac{M}{r_c^2}; \quad g_c \cdot (\text{m/sec}^2)^{-1} = 5.06582897215e + 18$$

Newtonowska siła przyciągania dla masy $m_p \cdot \text{kg}^{-1} = 4.64e - 09$ na powierzchni czarnej dziury wyniesie:

$$F_c := m_p \cdot g_c; \quad F_c \cdot (\text{GN})^{-1} = 23.5054464308$$

Odp.: Ziemia stanie się czarną dziurą jeśli ściśniemy ją do kuli o promieniu conajmniej $r_c \cdot \text{mm}^{-1} = 8.87076116938$ a na jej powierzchni na ciało o masie $m_p \cdot \mu\text{gm}^{-1} = 4.64$ zgodnie z teorią newtonowską, zadziała siła $F_c \cdot \text{GN}^{-1} = 23.5054464308$.

% Ostatnia zmiana 2008-09-20

\noindent

Poniższe obliczenia przeprowadzono przy użyciu pakietu

\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX/en.html}{CalcTeX}.\

\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX/}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX/}

\Zadanie{Ziemia jako czarna dziura}

Jeżeli udałoby się ścisnąć kulę ziemską do dowolnych rozmiarów,
to przy jakim promieniu stałaby się czarną dziurą oraz

ile, zgodnie z teorią newtonowską,

$\%m_p=1.6726231e-27\cdot \text{kg}$

wynosiłaby siła przyciągania ziemskiego dla masu

$\$m_p=4.64\cdot\text{mugm}$

$\%m_e=9.1093897e-31\cdot \text{kg}$

na powierzchni tak powstałej czarnej dziury?

\Obliczenia{}

Wiemy, że czarna dziura to obiekt dla którego prędkość
ucieczki jest conajmniej równa prędkości światła.\

Dane:\

$\%c=3\cdot 10^8\cdot\text{m/s}$

$\$c= 299\ 792\ 458.0\cdot\text{m/s}$ -- prędkość światła\

$\$G= 6.673231\cdot 10^{-11}\cdot\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$ -- stała grawitacji\

$\$M= 5.9736\cdot 10^{24}\cdot \text{kg}$ -- masa Ziemi\

$\$r= 6373.14\cdot\text{km}$ -- promień Ziemi\["2ex"]

Sprawdzenie stałych fizycznych poprzez obliczenie przyspieszenia ziemskiego

\begin{equation}

$g_z=G\cdot \frac{M}{r^2}$

";\;\;\;\ \label{gz}"

$g_z\cdot(\text{m/s}^2)^{-1}$

\end{equation}

Jak widać z równania (\ref{gz}) wartość przyspieszenia ziemskiego

jest akceptowalna więc można przypuszczać, że stałe są poprawne.\

Prędkość ucieczki dla ciała o masie "\$M\$" i promieniu "\$r\$" obliczamy

z poniższej zależności (\ref{v2}):

\begin{equation}

$v:=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}}$

"\label{v2}"

```

\end{equation}
Czyli dla Ziemi prędkość ucieczki wynosi:  $v \cdot (\text{km/s})^{-1}$ ."$
\\
Ziemia stanie się czarna dziurą, gdy prędkość ucieczki
będzie conajmniej równa prędkości światła, czyli:
"
\begin{equation}
c:=\sqrt{2 \cdot G \cdot M/r}
\leftarrow "
r:=\left( 2 \cdot G \cdot M_z \right) / c^2
"
\label{v=c}"
\end{equation}

\begin{equation}
r_c:=\left( 2 \cdot G \cdot M \right) / c^2
\end{equation}
podstawiając, promień ściśniętej Ziemi -- czarnej dziury,
wówczas wyniesie:  $r_c \cdot \text{omm}$ ."$\\
Pszyspieszenie ziemskie ma powierzchni tak powstałej czarnej dziury wynosi:
\[
g_c:=G \cdot \frac{M}{r_c^2}
";\;\;\;"
g_c \cdot (\text{m/sec}^2)^{-1}
\]
Newtonowska siła przyciągania dla masy  $m_p \cdot \text{okg}$  na powierzchni
czarnej dziury wyniesie:
\[
F_c:=m_p \cdot g_c
";\;\;\;"
F_c \cdot (\text{GN})^{-1}
\]
{\bf Odp.:}
Ziemia stanie się czarną dziurą jeśli ściśniemy ją do kuli o promieniu conajmniej
 $r_c \cdot \text{omm}$  a na jej powierzchni na ciało o masie
 $m_p \cdot \text{omugm}$  zgodnie z teorią newtonowską, zadziała siła  $F_c \cdot \text{GN}$ ."$

```