



Rysunek 1: Element błonki

## Spis treści

1	Przykłady rozwiązań w CalcTeX-u	1
1.1	Bańka mydlana	1

## 1 Przykłady rozwiązań w CalcTeX-u

Obliczenia wykonane za pomocą pakietu CalcTeX

21 marca 2009

<http://sg.bzip.pl/CalcTeX>.

Jestem otwarty na wszelkie uwagi: CalcTeX (at) onet (dot) eu

### 1.1 Bańka mydlana

Jaką pracę trzeba wykonać, aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu  $r := 12.5 \cdot \text{cm}$ ? Współczynnik napięcia powierzchniowego  $\sigma := 0.04 \cdot \text{N/m}$ .

#### Obliczenia

Jeśli proces nadmuchiwanie bańki uznamy za izotermiczny, to szukana praca  $W_b$  wyrazi się poprzez wartość energii  $\Delta E_{pow}$  traconej na utworzenie powierzchni banki i pracę  $W_{spr}$  potrzebną do sprężania powietrza wewnątrz bańki do ciśnienie  $p$ :

$$W_b := \Delta E_{pow} + W_{spr}$$

Ciśnienie  $p$  jest ciśnieniem powietrza wewnątrz bańki. Aby je obliczyć, rozważmy element błonki (rys. 1). Wiadomo, że przy przejściu przez kulistą powierzchnię cieczy ciśnienie zmienia się skokowo, przy czym wartość zmiany

$$\Delta p := \frac{2 \cdot \sigma}{r}; \quad \Delta p \cdot \text{Pa}^{-1} = 0.64$$

Zatem

$$p_b - p_a = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

$$p_c - p_b = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

gdzie:  $p_a$  jest zewnętrznym ciśnieniem powietrza na bańkę,  $p_b$  – ciśnienie wewnątrz błonki,  $p_c$  – szukane ciśnienie powietrza wewnątrz błonki.  $p_o := 1 \cdot \text{atm}$  Pamiętając, że  $p_a := p_o$  otrzymamy:

$$p := p_o + \frac{4 \cdot \sigma}{r}; \quad p \cdot \text{kPa}^{-1} = 101.32628$$

Energia zużyta na utworzenie powierzchni bańki o powierzchni

$$A_b := 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2; \quad A_b \cdot (\text{cm})^{-2} = 3926.99081699$$

i objętości

$$V_b := \frac{4.0}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\Delta E_{pow} := \sigma \cdot A_b, \quad \Delta E_{pow} \cdot \text{J}^{-1} = 0.0157079632679$$

gdzie  $A_b$  jest sumą wewnętrzną i zewnętrzną powierzchni bańki. Szukaną pracę możemy obliczyć ze wzoru

$$W_b := \Delta E_{pow} + W_{spr}; \quad W_b := \sigma \cdot A_b + p \cdot V_b \cdot \log\left(\frac{p}{p_o}\right); \quad W_b \cdot \text{J}^{-1} = 0.0261800049239$$

lub podstawiając

$$W_b := 8 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sigma + p_o \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot \sigma}{r \cdot p_o}\right) \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \cdot \log\left(1 + \frac{4 \cdot \sigma}{r \cdot p_o}\right); \quad W_b \cdot \text{J}^{-1} = 0.0261800049239$$

**Odp.:** Aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu  $r \cdot \text{cm}^{-1} = 12.5$  należy wykonać pracę  $W_b \cdot \text{mJ}^{-1} = 26.1800049239$ .

`{\scriptsize`

`% Copyright CalcTeX@onet.eu`

`Obliczenia wykonane za pomocą pakietu`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{CalcTeX} \hfill \today\`

`\linkurl{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}{http://sg.bzip.pl/CalcTeX}.\`

`Jestem otwarty na wszelkie uwagi:`

`\EmailToCalcTeX}`

`\Zadanie{Bańka mydlana}`

`Jaką pracę trzeba wykonać, aby nadmuchać bańkę mydlaną o~promieniu`

`$r:=12.5\cdot \text{cm}?"$`

`Współczynnik napięcia powierzchniowego`

`$\sigma :=0.04\cdot \text{N}/\text{m}."$`

`\Obliczenia{}`

`Jeśli proces nadmuchiwanie bańki uznamy za izotermiczny,`

`to szukana praca "$W_b"$ wyrazi się poprzez wartość energii "$\Delta E_{pow}$"`

`traconej na utworzenie powierzchni banki i~pracę "$W_{spr}$"`

`potrzebną do sprężania powietrza wewnątrz bańki do ciśnienie "$p:"$`

`\["`

```

W_b:=\Delta E_{pow}+W_{spr}
"\]
Ciśnienie "$p"$ jest ciśnieniem powietrza wewnątrz bańki.
Aby je obliczyć, rozważmy element błonki (rys. \ref{blonka}).
Wiadomo, że przy przejściu przez kulistą powierzchnię cieczy
ciśnienie zmienia się skokowo, przy czym wartość zmiany
\[ \Delta p := \frac{2 \cdot \sigma}{r}
";\;\;\;"
\Delta p \cdot \text{oPa}\]

\begin{figure}\begin{center}
\includegraphics[width=0.65\textwidth]{figs/banka}
\caption{Element błonki}\label{blonka}\end{center}\end{figure}

Zatem
\[ "p_b - p_a = \frac{2 \cdot \sigma}{r} "\]
\[ "p_c - p_b = \frac{2 \cdot \sigma}{r} "\]
gdzie:
"$p_a$" jest zewnętrznym ciśnieniem powietrza na bańkę,
"$p_b$" -- ciśnienie wewnątrz błonki,
"$p_c$" -- szukane ciśnienie powietrza wewnątrz błonki.
$p_o := 1 \cdot \text{atm}$
Pamiętając, że $p_a = p_o$ otrzymamy:
\[
p = p_o + \frac{4 \cdot \sigma}{r}
";\;\;\;"
p \cdot \text{okPa}
\]

Energia zużyta na utworzenie powierzchni bańki o ~powierzchni
\[
A_b = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2
"; \;\;\;"
A_b \cdot (\text{cm})^{-2}
\]
i objętości
\[
V_b = \frac{4.0}{3} \cdot \pi \cdot r^3
\]
\]
\Delta E_{pow} := \sigma \cdot A_b
",\;\;\;"
\Delta E_{pow} \cdot \text{oJ}
\]
gdzie "$A_b$" jest sumą wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnii bańki.
Szukaną pracę możemy obliczyć ze wzoru
\[
"W_b := \Delta E_{pow} + W_{spr};\;\;\;"
W_b := \sigma \cdot A_b + p \cdot V_b \cdot \log \left( \frac{p}{p_o} \right)

```

";\;\;"

$W_b \cdot \omega$

\]

lub podstawiając

\[

$W_b = 8 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sigma + p_o \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot \sigma}{r \cdot p_o}\right)$

";\;\;"

$W_b \cdot \omega$

{\bf Odp.:} Aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu  $r \cdot \omega$

należy wykonać pracę  $W_b \cdot \omega$ ."